6. Elektromagnetische Wellen

6.1 Ebene Wellen

Maxwellgleichungen ohne Quellen im Medium:

$$\varepsilon\, \vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0 \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$\longrightarrow$

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E} = \vec{\nabla}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{E} - \Delta\vec{E} = -\Delta\vec{E} = -\frac{1}{c}\vec{\nabla}\times\dot{\vec{B}}$$

$$-\Delta\vec{B} = \frac{\mu\varepsilon}{c}\,\vec{\nabla}\times\dot{\vec{E}}$$

$$\vec{\nabla}\times\dot{\vec{B}} = \frac{\mu\varepsilon}{c}\,\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\vec{\nabla}\times\dot{\vec{E}} = -\frac{1}{c}\,\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$$

$\longrightarrow$

Wellengleichungen

$$\left(\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\vec{E}(\vec{x},t)=0 \qquad \left(\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\vec{B}(\vec{x},t)=0$$

Eine Welle heißt <u>eben</u>, wenn sie nur in einer Richtung vom Ort abhängt. Ist diese Richtung o.B.d.A. z, dann ist wegen

$$\left(\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) f\left(z \pm \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\right) = 0$$

eine beliebige Lösung komponentenweise von der Form von f (muß aber noch das Gaußsche Gesetz erfüllen).
Die Phasengeschwindigkeit beträgt

$$v_{ph} = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{c}{n} \quad \text{mit} \quad n = \sqrt{\mu\varepsilon}$$

Wir betrachten nun Lösungen in der Form von Fourierkomponenten

$$\vec{E}(\vec{x},t) = \mathrm{Re}\left[\vec{E}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}\right], \quad \vec{B}(\vec{x},t) = \mathrm{Re}\left[\vec{B}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}\right]$$

mit $\omega = \frac{c}{n}|\vec{k}|$

Mit $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0$ und $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \Longrightarrow \vec{k}\cdot\vec{E}_0=0$ und $\vec{k}\cdot\vec{B}_0=0$

$\longrightarrow$ $\vec{E}$ und $\vec{B}$ Feld stehen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. Man sagt, elektromagnetische Wellen sind <u>transversal</u>.

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \longrightarrow i\vec{k}\times\vec{E} = i\omega\frac{1}{c}\vec{B}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \longrightarrow i\vec{k}\times\vec{B} = -i\omega\frac{\mu\varepsilon}{c}\vec{E}$$

$\longrightarrow$ $\vec{E}$ und $\vec{B}$ Feld stehen aufeinander senkrecht.

$$\vec{B} = \frac{c}{\omega}\vec{k}\times\vec{E} \longrightarrow$$

$$|\vec{B}|^2 = \frac{c^2}{\omega^2}(\vec{k}\times\vec{E})\cdot(\vec{k}\times\vec{E}) = \frac{c^2}{\omega}\varepsilon_{ijk}k_jE_k\,\varepsilon_{ilm}k_lE_m$$

$$= \frac{c^2}{\omega^2}(\delta_{jl}\delta_{km}-\delta_{jm}\delta_{kl})k_jE_kk_lE_m = \frac{c^2}{\omega}\left(\vec{k}^2\vec{E}^2-(\vec{k}\cdot\vec{E})\right)^2$$

$$= \frac{c^2\vec{k}^2}{\omega^2}|\vec{E}|^2 = n^2|\vec{E}|^2 \longleftrightarrow$$

$$|\vec{E}| = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}|\vec{B}|$$

Wir haben noch die Freiheit, eine beliebige Polarisation in der Ebene $\vec{k}\cdot\vec{x}=0$ zu wählen. Ein komplexer Vektor in einer Ebene $(\perp\vec{k})$ hat vier Freiheitsgrade, so daß wir ansetzen:

$e^{i\alpha}\,\vec{E}_0 = \vec{a}_1 + i\vec{a}_2$ (mit $\vec{a}_{1,2}\cdot\vec{k} = 0$)

Dabei sind $\vec{a}_{1,2}$ reell und α eine beliebige Phase welche wir in zweckmäßiger Weise wählen können.

$$\longrightarrow \quad \vec{E}_0^{\,2} = |\vec{E}_0|^2 e^{i\gamma} = e^{-2i\alpha}\left(\vec{a}_1^{\,2} - \vec{a}_2^{\,2} + 2i\,\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2\right)$$

wähle $\alpha = -\frac{\gamma}{2} \Longrightarrow (\vec{a}_1 + i\vec{a}_2)^2 \in \mathbb{R} \Longrightarrow \vec{a}_1\cdot\vec{a}_2 = 0 \Longleftrightarrow \vec{a}_1 \perp \vec{a}_2$

Definiere kartesisches Koordinatensystem mit

$$\hat{e}_1 = \frac{\vec{a}_1}{a_1}, \quad \hat{e}_2 = \mp\frac{\vec{a}_2}{a_2}, \quad \hat{e}_3 = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \quad \text{mit } a_1 = |\vec{a}_1|,\ a_2 = |\vec{a}_2|$$

Das Vorzeichen soll dabei so gewählt werden, daß das Koordinatensystem rechtshändig ist.
Ist einer der $\vec{a}_{1,2} = 0$, so ist der Basisvektor senkrecht zu den beiden anderen zu wählen.

$\longrightarrow$

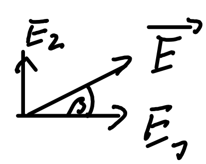
$$\vec{E}(\vec{x},t) = \mathrm{Re}\left[(a_1\hat{e}_1 \mp i a_2 \hat{e}_2)\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t - \alpha)}\right.$$

$$= a_1\hat{e}_1 \cos(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t - \alpha) \pm a_2\hat{e}_2 \sin(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t - \alpha)$$

$$=: E_1(\vec{x},t)\,\hat{e}_1 + E_2(\vec{x},t)\,\hat{e}_2$$

$$\Longrightarrow \frac{E_1^2}{a_1^2} + \frac{E_2^2}{a_2^2} = 1 \longrightarrow \text{Ellipsengleichung}$$

$$\tan\beta(t) = \frac{E_2}{E_1} = \mp\frac{a_2}{a_1}\tan(\omega t + \delta)$$



mit $\delta = \alpha - \vec{k}\cdot\vec{x}$

Die Periodendauer für einen Umlauf der Ellipse beträgt
$T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Wir merken noch an, daß man sagt, die ebene Welle sei im allgemeinen Fall elliptisch polarisiert. Die wichtigen Spezialfälle mit einer verschwindenden Halbachse sowie zwei gleich langen Halbachsen sind:

$$e^{i\alpha}\vec{E}_0 = \vec{a}_1 + i\vec{a}_2 = \begin{cases} a\,\hat{e}_{1,2} & \text{lineare Polarisation} \\ a\,(\hat{e}_1 \pm i\hat{e}_2) & \text{zirkulare Polarisation} \end{cases}$$

In der Quantenmechanik zeigt sich, daß die zirkulare Polarisation den Spineigenzuständen der Lichtteilchen entspricht.

Zur Berechnung der Energie- und Impulsdichte ebener Wellen betrachten wir

$$a(t) = \mathrm{Re}\left[a_0\, e^{-i\omega t}\right], \qquad b(t) = \mathrm{Re}\left[b_0\, e^{-i\omega t}\right]$$

$\longrightarrow$

$$a(t)\,b(t) = \frac{1}{4}\left(a_0\, e^{-i\omega t} + a_0^*\, e^{i\omega t}\right)\left(b_0\, e^{-i\omega t} + b_0^*\, e^{i\omega t}\right)$$

Bei zeitlicher Mittelung fallen die oszillatorischen Beiträge weg:

$$\langle a(t)\,b(t)\rangle = \frac{1}{4}\left(a_0 b_0^* + a_0^* b_0\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left[a_0 b_0^*\right]$$

$\longrightarrow$

Zeitgemittelte Energiedichte: $\qquad \mu\varepsilon|\vec{E}|^2 = |\vec{B}|^2$

$$\langle w_{em}\rangle = \frac{1}{8\pi}\left\langle \varepsilon\vec{E}^2 + \frac{1}{\mu}\vec{B}^2\right\rangle = \frac{1}{16\pi}\left(\varepsilon\,\mathrm{Re}\left[E_0 E_0^*\right] + \frac{1}{\mu}\mathrm{Re}\left[B_0 B_0^*\right]\right)$$

$$= \frac{1}{16\pi}\left(\varepsilon|\vec{E}|^2 + \frac{1}{\mu}|\vec{B}|^2\right) = \frac{\varepsilon}{8\pi}|\vec{E}|^2 = \frac{1}{8\pi\mu}|\vec{B}|^2$$

Zeitgemittelte Energiestromdichte:

$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{c}{4\pi}\frac{1}{\mu}\langle\vec{E}\times\vec{B}\rangle = \frac{c}{8\pi}\frac{1}{\mu}\mathrm{Re}\left[\vec{E}_0\times\vec{B}_0^*\right] = \frac{c}{8\pi\mu}|\vec{E}|^2\sqrt{\mu\varepsilon}\,\hat{k}$$

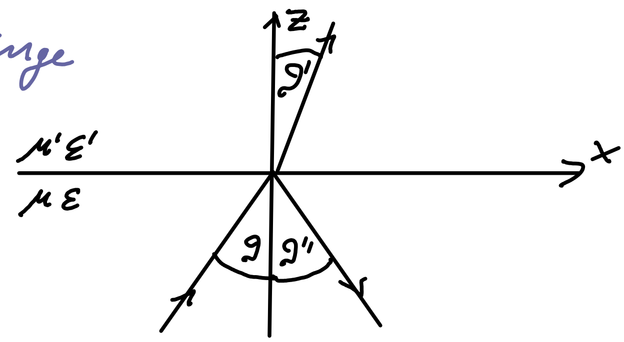
$$= \frac{\varepsilon}{8\pi}|\vec{E}|^2\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\,\hat{k} = \langle w_{em}\rangle\frac{c}{n}\,\hat{k}$$

Die Energiedichte wird also mit der Geschwindigkeit $\frac{c}{n}$ entlang des Wellenvektors transportiert.

6.2 Reflexion und Brechung

Im allgemeinen ist n eine Funktion der Frequenz. Darüberhinaus läßt sich die Dämpfung der Wellen im Material mittels eines Imaginärteils beschreiben. Hier gehen wir nur auf die einfachsten Brechungs- und Reflexionsphänomene ein.

Wir betrachten dazu folgende Grenzfläche in der $z=0$ Ebene:



Es gelten wieder die Zusammenhänge

$$k = |\vec{k}| = \frac{n\omega}{c}, \quad k' = |\vec{k}'| = \frac{n'\omega'}{c}$$

$$k'' = |\vec{k}''| = \frac{n\omega''}{c}, \quad n = \sqrt{\mu\varepsilon}, \quad n' = \sqrt{\mu'\varepsilon'}$$

Einfallende Welle:

$$\vec{E} = \mathrm{Re}\left[\vec{E}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)}\right], \qquad \vec{D} = \varepsilon\vec{E}$$

$$\vec{B} = \frac{c}{\omega}\,\vec{k}\times\vec{E}, \qquad \vec{H} = \frac{c}{\mu\omega}\,\vec{k}\times\vec{E}$$

Gebrochene Welle:

$$\vec{E}' = \mathrm{Re}\left[\vec{E}_0'\, e^{i(\vec{k}'\cdot\vec{x} - \omega' t)}\right], \qquad \vec{D}' = \varepsilon'\vec{E}'$$

$$\vec{B}' = \frac{c}{\omega'}\,\vec{k}'\times\vec{E}', \qquad \vec{H}' = \frac{c}{\mu'\omega'}\,\vec{k}'\times\vec{E}'$$

Reflektierte Welle:

$$\vec{E}'' = \mathrm{Re}\left[\vec{E}_0''\, e^{i(\vec{k}''\cdot\vec{x} - \omega'' t)}\right], \qquad \vec{D}'' = \varepsilon\vec{E}''$$

$$\vec{B}'' = \frac{c}{\omega''}\,\vec{k}''\times\vec{E}'', \qquad \vec{H}'' = \frac{c}{\mu\omega''}\,\vec{k}''\times\vec{E}''$$

Randbedingungen:

Die Tangentialkomponenten von $\vec{E}$ und $\vec{H}$ und die Normalkomponenten von $\vec{D}$ und $\vec{B}$ sind stetig an der Grenzfläche $z=0$. Damit dies für alle Zeiten t gilt, müssen $\omega = \omega' = \omega''$ sein.

$\Longrightarrow k = k''$

Außerdem müssen die Anschlußbedingungen an jedem Ort der Ebene erfüllt sein. $\Longrightarrow \vec{k}\cdot\vec{x}\big|_{z=0} = \vec{k}'\cdot\vec{x}\big|_{z=0} = \vec{k}''\cdot\vec{x}\big|_{z=0}$

Propagieren die Wellen o.B.d.A in der x-z-Ebene, dann gilt also: $k_x = k'_x = k''_x \Longleftrightarrow k \sin\vartheta = k' \sin\vartheta' = k \sin\vartheta''$

$\Longrightarrow \vartheta = \vartheta''$ (Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel)

$$n \sin\vartheta = n' \sin\vartheta' \Longleftrightarrow \frac{\sin\vartheta'}{\sin\vartheta} = \frac{n}{n'} \quad \text{(Brechungsgesetz)}$$

Wir betrachten noch näher die Komponenten Polarisierter Wellen. Die Stetigkeitsbedingungen lauten:

$$\left(\varepsilon\left(\vec{E}_0 + \vec{E}_0''\right) - \varepsilon'\vec{E}_0'\right)\cdot\vec{n} = 0 \qquad (S1)$$

$$\left(\vec{k}\times\vec{E}_0 + \vec{k}''\times\vec{E}_0'' - \vec{k}'\times\vec{E}_0'\right)\cdot\vec{n} = 0 \qquad (S2)$$

$$\left(\vec{E}_0 + \vec{E}_0'' - \vec{E}_0'\right)\times\vec{n} = 0 \qquad (S3)$$

$$\left(\frac{1}{\mu}\left(\vec{k}\times\vec{E}_0 + \vec{k}''\times\vec{E}_0''\right) - \frac{1}{\mu'}\left(\vec{k}'\times\vec{E}_0'\right)\right)\times\vec{n} = 0 \qquad (S4)$$

Der allgemeine Fall ergibt sich, wenn wir Polarisationen parallel ($\vec{E}$ Feld in der Ebene der Zeichnung, x-z-Ebene) und senkrecht ($\vec{E}$ Feld senkrecht zur Ebene der Zeichnung, y-Richtung) separat betrachten, als Linearkombination.

Senkrechte Polarisation:

$$(S3) \Longrightarrow E_0 + E_0'' - E_0' = 0 \Longleftrightarrow \frac{E_0'}{E_0} - \frac{E_0''}{E_0} = 1$$

Außerdem bilden wir das Kreuzprodukt aus $\hat{e}_z$ und (S4) und benutzen, daß

$$\hat{e}_z\times(\vec{k}\times\hat{e}_y) = \vec{k}(\hat{e}_z\cdot\hat{e}_y) - \hat{e}_y(\vec{k}\cdot\hat{e}_z) = -k_z\hat{e}_y$$

$$\longrightarrow \frac{1}{\mu} E_0 k_z + \frac{1}{\mu} E_0'' k_z'' - \frac{1}{\mu'} E_0' k_z' = 0 \qquad k' = k\frac{n'}{n} = k\sqrt{\frac{\mu'\varepsilon'}{\mu\varepsilon}}$$

$$\longrightarrow \frac{1}{\mu}(E_0 - E_0'')\, k \cos\vartheta = \frac{1}{\mu'} E_0' k' \cos\vartheta' = \sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu\mu'\varepsilon}}\, E_0' \cos\vartheta'$$

$$\longrightarrow (E_0 - E_0'')\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cos\vartheta = \sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu'}}\, E_0' \cos\vartheta' \iff$$

$$\frac{E_0'}{E_0}\sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu'}} \cos\vartheta' + \frac{E_0''}{E_0}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cos\vartheta = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cos\vartheta$$

$$\Longrightarrow \frac{E_0'}{E_0}\sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu'}} \cos\vartheta' + \left(\frac{E_0'}{E_0} - 1\right)\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cos\vartheta = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cos\vartheta$$

$$\Longrightarrow \frac{E_0'}{E_0} = \frac{2\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\cos\vartheta}{\sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu'}}\cos\vartheta' + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\cos\vartheta} = \frac{2\cos\vartheta}{\sqrt{\frac{\varepsilon'\mu}{\varepsilon\mu'}}\cos\vartheta' + \cos\vartheta}$$

$$\Longrightarrow \frac{E_0''}{E_0}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cos\vartheta + \left(\frac{E_0''}{E_0} + 1\right)\sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu'}} \cos\vartheta' = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cos\vartheta$$

$$\Longrightarrow \frac{E_0''}{E_0} = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\cos\vartheta - \sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu'}}\cos\vartheta'}{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\cos\vartheta + \sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu'}}\cos\vartheta'} = \frac{\cos\vartheta - \sqrt{\frac{\varepsilon'\mu}{\varepsilon\mu'}}\cos\vartheta'}{\cos\vartheta + \sqrt{\frac{\varepsilon'\mu}{\varepsilon\mu'}}\cos\vartheta'}$$

Ist $\mu = \mu' = 1 \Longrightarrow n = \sqrt{\varepsilon}$, $n' = \sqrt{\varepsilon'}$, $\frac{n}{n'} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}} = \frac{\sin\vartheta'}{\sin\vartheta}$ und

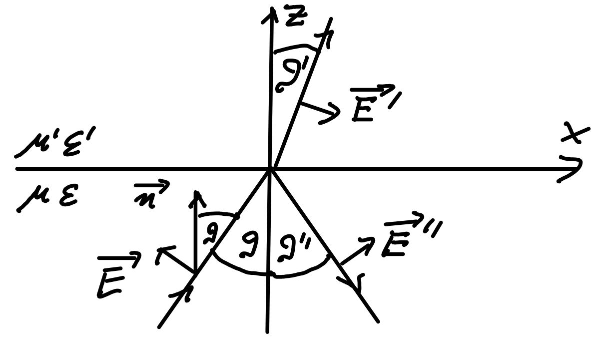
$$\frac{E_0'}{E_0} = \frac{2\cos\vartheta}{\frac{\sin\vartheta}{\sin\vartheta'}\cos\vartheta' + \cos\vartheta} = \frac{2\cos\vartheta\sin\vartheta'}{\cos\vartheta'\sin\vartheta + \cos\vartheta\sin\vartheta'} = \frac{2\cos\vartheta\sin\vartheta'}{\sin(\vartheta+\vartheta')}$$

$$\frac{E_0''}{E_0} = \frac{\cos\vartheta - \frac{\sin\vartheta}{\sin\vartheta'}\cos\vartheta'}{\cos\vartheta + \frac{\sin\vartheta}{\sin\vartheta'}\cos\vartheta'} = \frac{\cos\vartheta\sin\vartheta' - \sin\vartheta\cos\vartheta'}{\cos\vartheta\sin\vartheta' + \cos\vartheta'\sin\vartheta} = \frac{\sin(\vartheta'-\vartheta)}{\sin(\vartheta+\vartheta')}$$

(Fresnel'sche Formeln)

Parallele Polarisation:

$$|\vec{E}\times\vec{n}| = |\vec{E}||\vec{n}||\sin(\tfrac{\pi}{2}-\vartheta)|$$
$$= |\vec{E}||\vec{n}||\cos\vartheta|$$



(S3) $\Longrightarrow$ $(E_0 - E_0'')\cos\vartheta - E_0'\cos\vartheta' = 0$

$\Longleftrightarrow$ $\left(1-\frac{E_0''}{E_0}\right)\cos\vartheta = \frac{E_0'}{E_0}\cos\vartheta'$

Um (S4) zu verwenden, berechnen wir

$$(\vec{k}\times\vec{E})\times\hat{e}_z = \vec{E}(\vec{k}\cdot\hat{e}_z) - \vec{k}(\vec{E}\cdot\hat{e}_z) = \begin{pmatrix}E_x\\0\\E_z\end{pmatrix}k_z - \begin{pmatrix}k_x\\0\\k_z\end{pmatrix}E_z$$
$$= \begin{pmatrix}k_zE_x - k_xE_z\\0\\0\end{pmatrix} = \left[(\vec{k}\times\vec{E})\cdot\hat{e}_y\right]\hat{e}_x = |\vec{k}||\vec{E}|\,\hat{e}_x$$

(S4) $\Longrightarrow$ $\frac{k}{\mu}E_0 + \frac{k''}{\mu}E_0 - \frac{k'}{\mu'}E_0' = 0$

$$\xrightarrow[k'=\frac{\sqrt{\mu'\varepsilon'}}{c}\omega]{k=k''=\frac{\sqrt{\mu\varepsilon}\,\omega}{c}} (E_0+E_0'')\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} - E_0'\sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu'}} = 0 \Longleftrightarrow \left(1+\frac{E_0''}{E_0}\right)\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} = \frac{E_0'}{E_0}\sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu'}}$$

$\Longrightarrow$

$$\left(1-\frac{E_0''}{E_0}\right)\cos\vartheta\sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu'}} = \left(1+\frac{E_0''}{E_0}\right)\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\cos\vartheta'$$

$\Longrightarrow$

$$\frac{E_0''}{E_0} = \frac{\cos\vartheta\sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu'}} - \cos\vartheta'\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}}{\cos\vartheta\sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu'}} + \cos\vartheta'\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}} =$$

$$\frac{E_0'}{E_0} = \sqrt{\frac{\mu'\varepsilon}{\mu\varepsilon'}}\;\frac{2\cos\vartheta\sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu'}}}{\cos\vartheta\sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu'}} + \cos\vartheta'\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}}$$

$$1+\frac{a-b}{a+b} = \frac{2a}{a+b}$$

Mit $\frac{\cos\vartheta'}{\cos\vartheta}\sqrt{\frac{\varepsilon\mu'}{\varepsilon'\mu}} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\frac{\cos\vartheta'}{\cos\vartheta}\frac{n'}{n} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\frac{\cos\vartheta'}{\cos\vartheta}\frac{\sin\vartheta}{\sin\vartheta'} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\frac{\tan\vartheta}{\tan\vartheta'}$

folgt noch

$$\cos\vartheta' = \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon'\mu'}}\cos\vartheta\,\frac{\tan\vartheta}{\tan\vartheta'}$$

$$\frac{E_0''}{E_0} = \frac{\cos\vartheta\sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu'}} - \cos\vartheta\,\frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon'\mu'}}\,\frac{\tan\vartheta}{\tan\vartheta'}}{\cos\vartheta\sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu'}} + \cos\vartheta\,\frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon'\mu'}}\,\frac{\tan\vartheta}{\tan\vartheta'}} = \frac{\varepsilon'\tan\vartheta' - \varepsilon\tan\vartheta}{\varepsilon'\tan\vartheta' + \varepsilon\tan\vartheta}$$

$$\frac{E_0'}{E_0} = \sqrt{\frac{\mu'\varepsilon}{\mu\varepsilon'}}\,\frac{2\cos\vartheta\sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu'}}}{\cos\vartheta\sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu'}} + \cos\vartheta\,\frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon'\mu'}}\,\frac{\tan\vartheta}{\tan\vartheta'}}$$

$$\frac{\mu'\varepsilon\,\varepsilon'\varepsilon'\mu'}{\mu\,\varepsilon'\mu'} = \mu'\varepsilon'\frac{\varepsilon}{\mu} = \frac{\mu'\varepsilon'}{\varepsilon\mu}\varepsilon^2$$

$$= \frac{2\varepsilon\frac{\mu'}{\mu}\tan\vartheta'}{\varepsilon'\tan\vartheta' + \varepsilon\tan\vartheta}$$

(Fresnel'sche Formeln)

Ist $\mu = \mu'$, dann wird die Intensität der parallel zur Einfallsebene polarisierten Welle Null, wenn gilt:

$$\frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta} = \tan\vartheta = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\tan\vartheta' = \frac{n'^2}{n^2}\tan\vartheta' = \frac{\sin^2\vartheta}{\sin^2\vartheta'}\,\frac{\sin\vartheta'}{\cos\vartheta'} = \frac{\sin^2\vartheta}{\sin\vartheta'\cos\vartheta'}$$

$$\longrightarrow \sin\vartheta\cos\vartheta = \sin\vartheta'\cos\vartheta' \iff \sin(2\vartheta) = \sin(2\vartheta')$$

$$\Longrightarrow \vartheta + \vartheta' = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\sin\vartheta}{\sin\vartheta'} = \frac{n'}{n} = \frac{\cos\vartheta'}{\cos\vartheta} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right)}{\cos\vartheta} = \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}$$

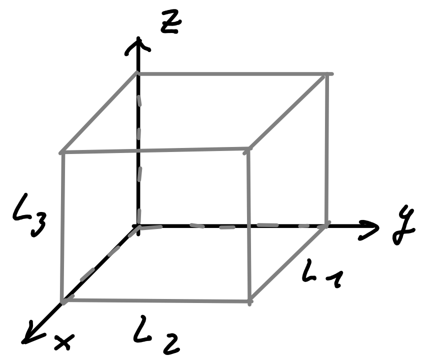
Dies definiert den Brewster Winkel

$$\tan\vartheta_B = \frac{n'}{n}$$

Fällt unpolarisiertes Licht in diesem Winkel ein, dann ist das reflektierte Licht senkrecht zur Einfallsebene polarisiert. Dieses Phänomen kann man gut mit einem Polarisationsfilter an einer Fensterscheibe beobachten.

6.4 Hohlraumwellen

Betrachte quaderförmigen Hohlraum, begrenzt durch Metallwände (beschrieben als ideale Leiter). Gesucht sind Lösungen der Wellengleichung



$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\vec{E}(\vec{x},t) = 0$$

$\longrightarrow$ Separationsansatz

$$E_i(x,y,z,t) = C_i\, X(x)\, Y(y)\, Z(z)\, T(t)$$

$$\longrightarrow \underbrace{\frac{X''}{X}}_{=-k_1^2} + \underbrace{\frac{Y''}{Y}}_{=-k_2^2} + \underbrace{\frac{Z''}{Z}}_{=-k_3^2} - \frac{1}{c^2}\underbrace{\frac{T''}{T}}_{=-\omega^2} = 0$$

Jeder einzelne Term ist dabei gleich einer koordinatenunabhängigen Konstante, welche wir hier benannt haben.

$$\Longrightarrow \omega^2 = c^2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) = c^2 \vec{k}^2$$

$$E_i = \mathrm{Re}\left[C_i \sin(k_1 x + \alpha_1)\sin(k_2 y + \alpha_2)\sin(k_3 z + \alpha_3)\right]$$

An den Leiteroberflächen müssen die Tangentialkomponenten des elektrischen Feldes verschwinden. (Dies ist eine Näherung, da sich die Leiterelektronen dazu mitbewegen müssen. Solche Resonatoren lassen sich daher nicht für beliebig hohe Frequenzen realisieren und sind daher vor allem im Radio- und Mikrowellenbereich von Belang.)

E_x tangential zu den Wänden $y=0, L_2$ und $z=0, L_3$:

$$\sin(\alpha_2) = \sin(k_2 L_2 + \alpha_2) = 0 \Longrightarrow \alpha_2 = 0,\quad k_2 = \frac{m\pi}{L_2},\quad m = 0,1,2,3,\dots$$

$$\sin(\alpha_3) = \sin(k_3 L_3 + \alpha_3) = 0 \Longrightarrow \alpha_3 = 0,\quad k_3 = \frac{n\pi}{L_3},\quad n = 0,1,2,3,\dots$$

$\longrightarrow$

$$E_x = C_1 X(x) \sin\frac{m\pi y}{L_2} \sin\frac{n\pi z}{L_3} e^{-i\omega t}$$

und entsprechend

$$E_y = C_2 Y(y) \sin\frac{l'\pi x}{L_1} \sin\frac{n'\pi z}{L_3} e^{-i\omega' t}$$

$$E_z = C_3 Z(z) \sin\frac{l''\pi x}{L_1} \sin\frac{m''\pi y}{L_2} e^{-i\omega'' t}$$

Ein Zusammenhang der drei Faktoren besteht noch durch das Gauß'sche Gesetz

$$0 = \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = C_1 X'(x) \sin\frac{m\pi y}{L_2} \sin\frac{n\pi z}{L_3} e^{-i\omega t}$$

$$+ C_2 Y'(y) \sin\frac{l'\pi x}{L_1} \sin\frac{n'\pi z}{L_3} e^{-i\omega' t}$$

$$+ C_3 Z'(z) \sin\frac{l''\pi x}{L_2} \sin\frac{m''\pi y}{L_2} e^{-i\omega'' t}$$

Um diese Gleichung zu allen Zeiten und an allen Orten innerhalb des Resonators zu erfüllen, muß gelten:

$$X'(x) \propto \sin\frac{l\pi x}{L_1}, \quad Y'(x) \propto \sin\frac{m'\pi y}{L_2}, \quad Z'(x) \propto \sin\frac{n''\pi z}{L_3}$$

$$\omega = \omega' = \omega'', \quad l = l' = l'', \quad m = m' = m'', \quad n = n' = n''$$

Mit einer bestimmten Wahl für $X, Y, Z \longrightarrow$

$$E_x = \mathrm{Re}\left[C_1 \cos\frac{l\pi x}{L_1} \sin\frac{m\pi y}{L_2} \sin\frac{n\pi z}{L_3} e^{-i\omega t}\right]$$

$$E_y = \mathrm{Re}\left[C_2 \sin\frac{l\pi x}{L_1} \cos\frac{m\pi y}{L_2} \sin\frac{n\pi z}{L_3} e^{-i\omega t}\right]$$

$$E_z = \mathrm{Re}\left[C_3 \sin\frac{l\pi x}{l_2} \sin\frac{m\pi y}{L_2} \cos\frac{n\pi z}{L_3} e^{-i\omega t}\right]$$

$$C_1 \frac{l}{L_1} + C_2 \frac{m}{L_2} + C_3 \frac{n}{L_3} = 0, \qquad \omega^2 = \pi^2 c^2 \left(\frac{l^2}{L_1^2} + \frac{m^2}{L_2^2} + \frac{n^2}{L_3^2}\right)$$

mit $l, m, n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ und mindestens ein $l, m, n \neq 0$

für eine nichtverschwindende Lösung.

Zwischen den komplexen Feldern besteht der Zusammenhang:

$$-\vec{\nabla}\times\vec{E} = \frac{1}{c}\,\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -i\,\frac{\omega}{c}\,\vec{B}$$

$\longrightarrow$

$$B_x = -\frac{ic}{\omega}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) = -\frac{ic}{\omega}\left(C_3\frac{\pi m}{L_2} - C_2\frac{\pi n}{L_3}\right)\sin\frac{l\pi x}{L_1}\cos\frac{m\pi y}{L_2}\cos\frac{n\pi z}{L_3}\,e^{-i\omega t}$$

$$B_y = -\frac{ic}{\omega}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) = -\frac{ic}{\omega}\left(C_1\frac{\pi n}{L_3} - C_3\frac{\pi l}{L_1}\right)\cos\frac{l\pi x}{L_1}\sin\frac{m\pi y}{L_2}\cos\frac{n\pi z}{L_3}\,e^{-i\omega t}$$

$$B_z = -\frac{ic}{\omega}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) = -\frac{ic}{\omega}\left(C_2\frac{\pi l}{L_1} - C_1\frac{\pi m}{L_2}\right)\cos\frac{l\pi x}{L_1}\cos\frac{m\pi y}{L_2}\sin\frac{n\pi z}{L_3}\,e^{-i\omega t}$$

Dies ist konsistent mit der Randbedingung verschwindender Normalkomponenten des $\vec{B}$-Feldes auf den Randflächen:

$$B_x(0,y,x) = B_x(L_1,y,x) = 0$$
$$B_y(x,0,z) = B_y(x,L_2,z) = 0$$
$$B_z(x,y,0) = B_z(x,y,L_3) = 0$$

Weiterhin prüfen wir leicht nach, daß $\vec{E}\cdot\vec{B} = 0 \Longleftrightarrow \vec{E}\perp\vec{B}$

Für einen Wellenleiter sei der Hohlraum in z-Richtung unbegrenzt. Wir können daher wählen: $Z(z) = e^{\pm ikz}$

Für im positive z-Richtung laufende Wellen wählen wir das positive Vorzeichen. $\longrightarrow$

$$E_x = C_1\cos\frac{l\pi x}{L_1}\sin\frac{m\pi y}{L_2}\,e^{i(kz-\omega t)}$$

$$E_y = C_2\sin\frac{l\pi x}{L_1}\cos\frac{m\pi y}{L_2}\,e^{i(kz-\omega t)}$$

$$E_z = C_3\sin\frac{l\pi x}{L_1}\sin\frac{m\pi y}{L_2}\,e^{i(kz-\omega t)}$$

$$\omega^2 = c^2\left(\frac{\pi^2 l^2}{L_1^2} + \frac{\pi^2 m^2}{L_2^2} + k^2\right) \qquad l,m = 0,1,2,3,\ldots$$ und nicht beide gleich Null

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \Longrightarrow ik\,C_3 = C_1\frac{l\pi}{L_1} + C_2\frac{m\pi}{L_2}$$

$$B_z = -\frac{ic}{\omega}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) = -\frac{ic\pi}{\omega}\left(\frac{C_2 l}{L_1} - \frac{C_1 m}{L_2}\right)\cos\frac{l\pi x}{L_1}\cos\frac{m\pi y}{L_2}\, e^{i(kz-\omega t)}$$

$$B_x = -\frac{ic}{\omega}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) = \left(-\frac{ic\pi}{\omega}\frac{C_3 m}{L_2}\sin\frac{l\pi x}{L_1}\cos\frac{m\pi y}{L_2} - \frac{ck}{\omega}C_2\sin\frac{l\pi x}{L_1}\cos\frac{m\pi y}{L_2}\right) * e^{i(kz-\omega t)}$$

$$B_y = -\frac{ic}{\omega}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) = \left(-\frac{ic\pi}{\omega}\frac{-C_3 l}{L_1}\cos\frac{l\pi x}{l_1}\sin\frac{m\pi y}{L_2} + \frac{ck}{\omega}C_1\cos\frac{l\pi x}{L_1}\sin\frac{m\pi y}{L_2}\right) * e^{i(kz-\omega t)}$$

$$\longrightarrow \vec{E}\cdot\vec{B} = 0 \Longleftrightarrow \vec{E}\perp\vec{B}$$

Für freie ebene Wellen fanden wir, daß $\vec{E}$- und $\vec{B}$-Feld senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung stehen. Man spricht dann von TEM-Wellen (transversal elektromagnetische Moden).

Im Rechteckleiter gibt es keine Moden mit $E_z = 0$ und $B_z = 0$:
Für $E_z = 0$ ist $C_3 = 0$ oder l oder m gleich Null.
Betrachte zunächst verschwindende Wellenzahlen:

$$\left.\begin{array}{l} l = 0 \ \& \ B_z = 0 \Longrightarrow C_1 m = 0 \Longrightarrow C_1 = 0 \\ m = 0 \ \& \ B_z = 0 \Longrightarrow C_2 l = 0 \Longrightarrow C_2 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \vec{E} = 0 \Longrightarrow \vec{B} = 0$$

Ist andererseits $C_3 = 0$ ($\&\ B_z = 0$) $\Longrightarrow$

$$C_1\frac{m}{L_2} - C_2\frac{l}{L_1} = 0$$

und mit $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$, $E_z = 0 \Longrightarrow$

$$C_1\frac{l}{L_1} + C_2\frac{m}{L_2} = 0$$

Dieses Gleichungssystem hat nur die Lösung $C_1 = C_2 = 0$.
$\Longrightarrow \vec{E} = 0 \Longrightarrow \vec{B} = 0$

Es gibt hier also keine TEM Wellen. Da $\vec{E}\perp\vec{B}$, können wir entweder $\vec{E}\propto\hat{e}_z$ (TM) oder $\vec{B}\propto\hat{e}_z$

(TE) wählen. Der allgemeine Fall ist eine Linearkombination aus beiden.

Die einfachste TE-Mode ist gegeben für $l=1,\ m=0$ (oder umgekehrt).

$$\omega = c\sqrt{k^2 + \frac{\pi^2}{L_1^2}} > \frac{c\pi}{L_1}, \quad E_z = E_x = B_y = 0$$

Einfachste TM-Mode: $l = m = 1, \quad \frac{C_2 l}{L_1} - \frac{C_1 m}{L_2} = 0$

$$\omega = c\sqrt{k^2 + \frac{\pi^2}{L_1^2} + \frac{\pi^2}{L_2^2}} > c\sqrt{\frac{\pi^2}{L_1^2} + \frac{\pi^2}{L_2^2}}$$

Von Bedeutung sind auch andere Geometrien (z.B. Koaxialkabel)

6.5 Streuung von Licht

Wir wollen hier im Rahmen der klassischen Physik die Rayleigh- und Thomsonstreuung behandeln.

Oszillierende Punktladung

Betrachte Punktteilchen mit Ladung q auf der Bahn

$\vec{x}(t) = \vec{x}_0 \cos \omega t \qquad \ddot{\vec{x}}(t) = -\vec{x}_0 \omega^2 \cos \omega t$

$\longrightarrow$ Dipolmoment

$$\vec{p}(t) = \int d^3x \; \vec{x} \, \varrho(\vec{x},t) = \int d^3x \; \vec{x} \, q \, \delta(\vec{x} - \vec{x}_0 \cos \omega t)$$

$$= q \, \vec{x}_0 \cos \omega t = \mathrm{Re}\left[q \, \vec{x}_0 \, e^{-i\omega t} \right] = q \, \vec{x}_0 \, \frac{1}{2}\left(e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}\right)$$

Abgestrahlte Leistung:

$$P = \frac{c}{3} k^4 \vec{p}^{\,2} \underset{\substack{\uparrow \\ k = \frac{\omega}{c}}}{=} \frac{1}{3c^3} q^2 \omega^4 x_0^4 = \frac{2q^2}{3c^3} \langle \ddot{\vec{x}}^{\,2} \rangle$$

Das Punktteilchen habe nun die Masse m und befinde sich in einem Oszillatorpotential mit Frequenz ω_0. Der Abgestrahlten Leistung entspreche ein Dämpfungsterm Γ. Außerdem sollen folgende Felder anliegen:

$$\longrightarrow$$

$$m \ddot{\vec{x}} + \underbrace{m \Gamma \dot{\vec{x}}}_{= \vec{F}_{rad}} + m \omega_0^2 \vec{x} = q \, \vec{E}_0 \, e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

Um den Dämpfungsterm zu finden, nehmen wir an, daß in erster Näherung das Teilchen wie oben mit der Frequenz ω_0 oszilliert.

$$\vec{F}_{rad} = f_{rad} \, \dot{\vec{x}} = m \Gamma_{rad} \dot{\vec{x}}$$

$$\langle \vec{F}_{rad} \cdot \dot{\vec{x}} \rangle = \langle f_{rad}\, \dot{\vec{x}}^2 \rangle = P = \frac{2q^2}{3c^3} \langle \ddot{\vec{x}}^2 \rangle$$

$$f_{rad} = \frac{2q^2}{3c^3}\omega_0^2 = m\,\Gamma_{rad} \Longrightarrow \Gamma_{rad} = \frac{2q^2\omega_0^2}{3mc^3}$$

Im allgemeinen tragen neben Γ_{rad} auch andere Terme (insbesondere Transfer kinetischer Energie an andere Teilchen, z.B. Hüllenelektronen). Wir behandeln Γ daher im folgenden als einen phänomenologischen Parameter.

Für die Wellenlänge des einfallenden Lichts soll gelten $\lambda \gg x_0$, also z.B. viel größer als ein Atomradius.

$$\Longrightarrow \vec{k}\cdot\vec{x} \sim \frac{x_0}{\lambda} \ll 1$$

$$\Longrightarrow e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \approx 1$$

$$\Longrightarrow m\ddot{\vec{x}} + m\Gamma\dot{\vec{x}} + m\omega_0^2\vec{x} = q\vec{E}_0\, e^{-i\omega t}$$

Zur Lösung machen wir den Ansatz

$$\vec{x}(t) = \vec{a}\, e^{-i\omega t}$$

$$\longrightarrow$$

$$(-\omega^2 - i\Gamma\omega + \omega_0^2)\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}_0$$

$$\Longrightarrow \vec{p}(t) = q\vec{x}(t) = q\vec{a}\, e^{-i\omega t} = \frac{\frac{q^2}{m}\vec{E}_0}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\Gamma\omega}\, e^{-i\omega t}$$

Lösungen der homogenen Gleichung sind exponentiell fallend und müssen hier nicht berücksichtigt werden.

$\longrightarrow$ Abgestrahlte Leistung:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c\,\omega^4 |\vec{p}|^2}{8\pi c^3}\sin^2\vartheta = \frac{c}{8\pi}\left(\frac{q^2}{mc^2}\right)^2 |\vec{E}_0|^2 \frac{\omega^4 \sin^2\vartheta}{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \omega^2\Gamma^2}$$

ϑ ist dabei der Winkel zwischen $\vec{E}_0$ und der Abstrahlung.

Die Frequenz der Abstrahlung ist dabei gleich der Frequenz der einfallenden Welle. Quantenmechanisch ist die Frequenz proportional zur Energie. Man spricht daher von elastischer Streuung.

Wir definieren den <u>differentiellen Wirkungsquerschnitt</u>

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\frac{N_{out}}{\Delta t\, d\Omega}}{\frac{N_{in}}{\Delta t\, A}} = \frac{\frac{P_{out}}{d\Omega}}{\frac{P_{in}}{A}} = \frac{\frac{dP}{d\Omega}}{\langle|\vec{S}|\rangle}$$

Mit $N_{in,out}$ der Zahl der einfallenden bezw. auslaufenden Lichtteilchen. Quantenmechanisch sind diese proportional zur Energie. A ist die Fläche, über die der einfallende Teilchenstrom verteilt ist, und Δt ist das betrachtete Zeitintervall.

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}(\vec{B} \times \vec{E}) \Longrightarrow \langle|\vec{S}|\rangle = \frac{c}{8\pi}|\vec{E}_0|^2$$

$\longrightarrow$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{q^2}{mc^2}\right)^2 \frac{\omega^4 \sin^2\vartheta}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\Gamma^2}$$

Totaler Wirkungsquerschnitt:

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega}\, d\Omega = 2\pi \int_{-1}^{1} d\cos\vartheta \left(\frac{q^2}{mc^2}\right)^2 \frac{\omega^4(1-\cos^2\vartheta)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\Gamma^2}$$

$$= \frac{8\pi}{3}\left(\frac{q^2}{mc^2}\right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\Gamma^2}$$

<u>Thomsonstreuung</u> $(\omega \gg \omega_0)$

Dieser Grenzfall gilt für kleine Wellenlängen oder alternativ für die Streuung an freien Elektronen

$$\sigma_{Th} = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{q^2}{mc^2}\right)^2$$

Die Quantenelektrodynamik bestätigt diesen Ausdruck als den nichtrelativistischen Grenzfall der Klein-Nishima-Formel.

Rayleighstreuung ($\omega \ll \omega_0$)

$$\sigma = \sigma_{Th} \frac{\omega^4}{\omega_0^4}$$

Blaues Sonnenlicht wird in der Atmosphäre also sehr viel stärker gestreut als rotes. Das Streulicht im Tageshimmel erscheint daher blau. Morgens und abends, bei niedrigem Sonnenstand, kann die Sonne selbst durch die „Wegstreuung" der Blauanteile dagegen rot erscheinen, ein Effekt der durch Aerosole noch verstärkt werden kann.