5 Maxwell'sche Gleichungen

Im zeitunabhängigen Fall werden elektrische Felder nur von Ladungs-, magnetische Felder nur von Stromverteilungen erzeugt. Elektrizität und Magnetismus sind dann scheinbar getrennte Phänomene. Allerdings rufen zeitabhängige Magnetfelder elektrische Felder hervor und umgekehrt, so daß man von elektromagnetischen Feldern spricht. Diese werden durch die von Maxwell aufgestellten Gleichungen beschrieben, welche zunächst noch das Transformationsverhalten zwischen verschiedenen Inertialsystemen offen lassen. Dieser fehlende Zusammenhang wird letztlich durch die spezielle Relativitätstheorie geklärt.

5.1 Faradaysches Induktionsgesetz

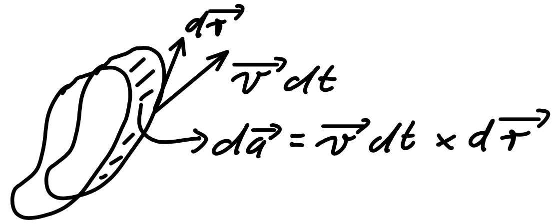
Eine zeitliche Änderung des magnetischen Fluß Φ durch eine Leiterschleife induziert in dieser eine Spannung. Die zeitliche Änderung kann dabei durch eine Änderung des $\vec{B}$-Feldes oder auch durch Bewegung der Schleife erfolgen.

Sei $\mathcal{C}$ die Kontur der Schleife und S eine davon umschlossene Fläche. Dann lautet dieser Befund

$$U = -\frac{1}{c}\dot{\Phi} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int_S d\vec{a}\cdot\vec{B}$$ Faradaysches Induktionsgesetz

Der von U induzierte Strom erzeugt dabei ein Magnetfeld, welches die verursachende Flußänderung hemmt (Lenz'sche Regel)

Angenommen $\mathcal{C}$ wird durch eine gleichförmige Bewegung mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ geändert. Die umschlossene Fläche ändert damit ihren Rand gemäß der der Skizze. $\Longrightarrow$



$$\dot{\Phi} = \int_S d\vec{a} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \oint_{\mathcal{C}} \underbrace{(\vec{v} \times d\vec{r}) \cdot \vec{B}}_{= -d\vec{r} \cdot (\vec{v} \times \vec{B})}$$

$\longrightarrow$

$$U = -\frac{1}{c} \int_S d\vec{a} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \frac{1}{c} \oint_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$$

Andererseits ergibt sich die Spannung aus der Summe der auf eine Einheitsladung wirkenden Kräfte:

$$U = \oint_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right)$$

Vergleich der ersten Terme in den Ausdrücken für U ergibt

$$\oint_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{E} = -\frac{1}{c} \int_S d\vec{a} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Vergleich der zweiten Terme ergibt, daß die Konstante $-\frac{1}{c}$ im Induktionsgesetz konsistent mit der Lorentz-Kraft gewählt wurde.

Mit dem Stokes'schen Satz folgt dann eine der Maxwellgleichungen:

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0}$$

5.2 Maxwellscher Verschiebungsstrom

Die grundlegenden Gleichungen der Elektrodynamik werden 1864 von Maxwell vervollständigt. Die Konstruktion geht aus von der Kontinuitätsgleichung

$$\dot{\varrho} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = \vec{\nabla}\cdot\left(\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{j}\right) = 0$$

Andererseits ist in der Magnetostatik $\vec{\nabla}\times\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$ womit $\vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$ folgt, im Widerspruch zur Kontinuitätsgleichung. Dies läßt sich beheben, wenn im Quellterm für das Magnetfeld zu $\vec{j}$ der Verschiebungsstrom $\frac{1}{4\pi}\dot{\vec{D}}$ addiert wird, so daß gilt

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}}$$

In der Tat gilt dann $\vec{\nabla}\cdot\vec{j} = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$, so daß die Kontinuitätsgleichung erfüllt ist.

Wir benutzen hier der Allgemeinheit halber die Felder $\vec{D}$ (elektrische Flußdichte) und $\vec{H}$ (magnetisches Feld), so daß, sofern wir von gemittelten Feldern, sowie Ladungs- und Stromdichten ausgehen, die Gleichungen makroskopisch interpretiert werden können. Identifizieren wir dagegen $\vec{D} = \vec{E}$ (elektrisches Feld) und $\vec{H} = \vec{B}$ (magnetische Flußdichte) und fassen alle Felder, Ladungs- und Stromdichten als mikroskopisch auf, dann können die erhaltenen Gleichungen als fundamentale (mikroskopisch gültige Gesetze modulo Korrekturen durch Quanten- und Teilchenphysik) verstanden werden.

Die Integralform des verallgemeinerten Ampèreschen Gesetzes lautet:

$$\oint_{\partial A} d\vec{r}\cdot\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\int_A d\vec{a}\cdot\left(\vec{j} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)$$

Wir fassen an dieser Stelle die Maxwell-Gleichungen noch einmal zusammen (im obigen Sinne sowohl makroskopisch als auch mikroskopisch gültig):

$$\boxed{\begin{array}{ll} \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = 4\pi\varrho & \text{Gauß'sches Gesetz} \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 & \text{Gauß'sches Gesetz des Magnetismus} \\ \vec{\nabla}\times\vec{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} & \text{Ampèresches Gesetz / Durchflutungsgesetz} \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0 & \text{Faradaysches Induktionsgesetz} \end{array}}$$

5.3 Elektromagnetische Feldenergie

Wir verallgemeinern nun das Resultat für die Energie des elektrischen Feldes.

An ein Punktteilchen übertragene Leistung:

$$\frac{dW_{mat}^{(i)}}{dt} = q_i\vec{v}_i\cdot\vec{E}(\vec{x}_i) = \int d^3x\; q_i\vec{v}_i\,\delta^3(\vec{x}-\vec{x}_i)\cdot\vec{E}(\vec{x})$$

$$= \int d^3x\;\vec{j}_i(\vec{x})\cdot\vec{E}(\vec{x})$$

Insgesamt: $E_{mat} = \sum_i E_{mat}^{(i)}$, $\vec{j} = \sum_i \vec{j}_i$

$$\longrightarrow \frac{dW_{mat}}{dt} = \int d^3x\;\vec{j}(\vec{x})\cdot\vec{E}(\vec{x})$$

Ersetze im Integranden $\vec{j}$ mit Hilfe der Maxwell-Gleichungen und der Relation

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\times\vec{H} = \varepsilon_{ijk}\nabla_i E_j H_k = \varepsilon_{ijk} H_k \nabla_i E_j + \varepsilon_{ijk} E_j \nabla_i H_k$$
$$= \varepsilon_{kij} H_k \nabla_i E_j - \varepsilon_{jik} E_j \nabla_i H_k = \vec{H}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{E}) - \vec{E}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{H})$$

$\longrightarrow$

$$\vec{j}\cdot\vec{E} = \frac{c}{4\pi}\vec{E}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{H} - \frac{1}{4\pi}\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$
$$= -\frac{c}{4\pi}\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{H}) + \frac{c}{4\pi}\vec{H}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{E} - \frac{1}{4\pi}\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$
$$\overset{\text{Faraday}}{=} -\frac{c}{4\pi}\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{H}) - \frac{1}{4\pi}\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - \frac{1}{4\pi}\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

Falls $\vec{B}\propto\vec{H}$ und $\vec{E}\propto\vec{D}$ ist, können wir noch schreiben:

$$\vec{j}\cdot\vec{E} = -\frac{c}{4\pi}\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{H}) - \frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{B}\cdot\vec{H}\right)$$

Mit $\frac{\partial}{\partial t} w_{mat} = \vec{j}\cdot\vec{E}$ und

w_{mat} Dichte der potentiellen Energie der Ladungsträger

$w_{em} = \frac{1}{8\pi}\left(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{B}\cdot\vec{H}\right)$ Energiedichte des elektromagnetischen Feldes

$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}(\vec{E}\times\vec{H})$ Poyntingvektor

$\Longrightarrow$

$$\frac{d}{dt} W_{mat} = \int_V d^3x \frac{\partial}{\partial t} w_{mat} = \int_V d^3x \left(-\vec{\nabla}\cdot\vec{S} - \frac{\partial}{\partial t} w_{em}\right)$$
$$= -\frac{\partial}{\partial t}\int_V d^3x\, w_{em} - \int_{\partial V} d\vec{a}\cdot\vec{S}$$

Falls $\vec{E}$ und $\vec{H}$ hinreichend schnell für große $|\vec{x}|$ verschwinden, können wir V so groß wählen, daß der Randterm verschwindet. Dann gilt als

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V d^3x \left(w_{mat} + w_{em} \right) = 0$$

Aufgrund der Energieerhaltung ist die obige Identifikation von w_{em} mit der Energiedichte des Feldes also gerechtfertigt. Ist hingegen der Randterm nicht verschwindend, können wir $\vec{S}$ als eine Energiestromdichte auffassen, welche durch die Fläche ∂V dringt.
Mit diesen Definitionen wird ist die lokale Form dieser Identität der Energieerhaltung bekannt als das

Poynting-Theorem

$$\boxed{\frac{\partial w_{em}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = -\vec{j} \cdot \vec{E}}$$

Impulsbilanz

Wir stellen nun eine analoge Betrachtung für den Impuls an.

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{P}_{mat}}{dt} &= \sum_i q_i \left(\vec{E}(\vec{x}_i) + \frac{\vec{v}_i}{c} \times \vec{B}(\vec{x}_i) \right) \\
&= \int_V d^3x \sum_i q_i\, \delta^3(x - x_i) \left(\vec{E}(\vec{x}) + \frac{\vec{v}_i}{c} \times \vec{B}(\vec{x}) \right) \\
&= \int_V d^3x \left(\varrho(\vec{x})\, \vec{E}(\vec{x}) + \frac{1}{c} \vec{j}(\vec{x}) \times \vec{B}(\vec{x}) \right)
\end{aligned}$$

Der Einfachheit und Übersicht halber beschränken wir uns bei der nun fälligen Manipulation des Integranden auf die mikroskopische Form der Feldgleichungen.

$\longrightarrow$

$$\varrho(\vec{x})\,\vec{E}(\vec{x}) + \frac{1}{c}\,\vec{j}(\vec{x})\times\vec{B}(\vec{x})$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left(\vec{E}\;\vec{\nabla}\cdot\vec{E} + (\vec{\nabla}\times\vec{B})\times\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\times\vec{B}\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left(\vec{E}\;\vec{\nabla}\cdot\vec{E} + (\vec{\nabla}\times\vec{B})\times\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\times\vec{B}) + \frac{1}{c}\vec{E}\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)$$

Faraday

$$= \frac{1}{4\pi}\left(\vec{E}\;\vec{\nabla}\cdot\vec{E} + B\;\vec{\nabla}\cdot\vec{B} - \vec{E}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) - \vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B})\right)$$

$$- \frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\times\vec{B})$$

Wir identifizieren nun den Impuls des elektromagnetischen Feldes als

$$\vec{P}_{em} = \frac{1}{4\pi c}\int_V d^3x\;\vec{E}\times\vec{B}$$

Dies ist natürlich noch mit einem Erhaltungssatz zu begründen. Dazu sollte die rechte Seite in folgender Gleichung auf ein Oberflächenintegral zurückzuführen sein:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{P}_{mat} + \vec{P}_{em}\right) = \frac{1}{4\pi}\int_V d^3x\left(\vec{E}\;\vec{\nabla}\cdot\vec{E} - \vec{E}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) + \vec{B}\;\vec{\nabla}\cdot\vec{B} - \vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B})\right)$$

Diese Gleichung ist Vektorwertig, d.h. wir möchten den Integranden als Divergenz eines Tensors 2. Stufe T_{ij} schreiben, d.h. $\frac{d}{dt}(\vec{P}_{mat} + \vec{P}_{em})_i = \int d^3x\;\nabla_k T_{ki}$

Dazu formen wir um:

$$\left[\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\,\vec{B} + \vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B})\right]_i = B_j\nabla_j B_i + \varepsilon_{ijk}\,B_j\,\varepsilon_{klm}\nabla_l B_m$$

$$= B_j\nabla_j B_i + (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\,B_j\nabla_l B_m$$

$$= B_j\nabla_j B_i + B_j\nabla_i B_j - B_j\nabla_j B_i = B_j\nabla_i B_j = \left[\frac{1}{2}\vec{\nabla}\,\vec{B}^2\right]_i$$

$\longrightarrow$

$$\vec{B}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{B} - \vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = \vec{B}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) + (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} - \frac{1}{2}\vec{\nabla}\vec{B}^2$$

$$\left[\vec{B}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) + (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} - \frac{1}{2}\vec{\nabla}\vec{B}^2\right]_i = \nabla_k\left(B_k B_i - \frac{1}{2}\delta_{ki}\vec{B}^2\right)$$

Ganz genauso behandeln wir die Terme mit $\vec{E}$.
Wir erhalten so den <u>Maxwellschen Spannungstensor</u>

$$T_{ij} = \frac{1}{4\pi}\left[E_i E_j + B_i B_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2)\right]$$

Der Vektor $\vec{P}^{(s)}$ mit $p_j^{(s)} = \hat{n}_i T_{ij}$ ist dann der Impulsfluß durch eine Einheitsfläche mit der normalen $\hat{n}$. Wird dieser Impuls komplett absorbiert, erhalten wir also den Strahlungsdruck auf diese Fläche.

5.4 Eichpotentiale

Die Einführung der Potentiale ϕ und $\vec{A}$ hat den Vorteil, daß wir eine größere Zahl von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zu einer kleineren Zahl an Gleichungen zweiter Ordnung zusammenfassen können. Darüberhinaus sind dann bestimmte Gleichungen automatisch erfüllt, d.h. im zeitunabhängigen Fall $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ und $\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$.

Im zeitabhängigen Fall gilt immer noch $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$, was wir mit

$$\boxed{\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}}$$

automatisch erfüllen. Eingesetzt ins Induktionsgesetz erhalten wir

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 0$$

Den Ausdruck in Klammern können wir also als Gradienten schreiben:

$$\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\phi \Longleftrightarrow \boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}}$$

Einsetzen in die inhomogenen Maxwell-Gleichungen ergibt (wir nehmen wieder die mikroskopische Form an):

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho \longrightarrow \Delta\phi + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = -4\pi\rho$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \longrightarrow \Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} - \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{\nabla}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{A} - \Delta\vec{A}$$

Diese Gleichungen möchten wir nun entkoppeln. Dazu betrachten wir die Eichtransformation

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{A} &\longrightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda \\ \phi &\longrightarrow \phi' = \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Lambda\end{aligned}}$$ mit einem Skalarfeld Λ

$\longrightarrow$

$$\vec{B} \longrightarrow \vec{B}' = \vec{B}$$
$$\vec{E} \longrightarrow \vec{E}' = \vec{E} + \vec{\nabla}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Lambda - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\Lambda = \vec{E}$$

Die physikalischen Felder bleiben also unverändert.
Da Λ ein Skalarfeld ist, haben wir die Eichfreiheit eine zusätzliche skalare Gleichung zu erfüllen (mit geeigneter Wahl der Potentiale. Die Entkopplung obiger Gleichungen geschieht in der <u>Lorenz-Eichung</u>

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$$

Das heißt wir wählen Λ, so daß gilt

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}' + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi'}{\partial t} = 0 = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \Delta\Lambda - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Lambda$$

$$\Leftrightarrow \Delta\Lambda - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Lambda = -\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)$$

(und benennen schließlich wieder $\phi', \vec{A}'$ in $\phi, \vec{A}$ um).

$\longrightarrow$

$$\Delta\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -4\pi\varrho$$

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

Wir können die Lorenz-Bedingung erfüllen, indem wir allgemeine Potentiale $\phi, \vec{A}$ in geeigneter Weise in $\phi', \vec{A}'$ transformieren.

Wir bemerken auch, daß die Lorenz-Bedingung die Potentiale nicht eindeutig festlegt, da wir immer noch die Freiheit $\Lambda \to \Lambda + \tilde{\Lambda}$ mit $\Delta\tilde{\Lambda} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\tilde{\Lambda} = 0$ haben.

Wir betrachten nun auch noch die <u>Coulomb-Eichung</u> $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$, welche auch <u>transversale Eichung</u> genannt wird im zeitabhängigen Fall.

Es folgt, daß das skalare Potential die Poisson-Gleichung erfüllt,

$$\Delta\phi = -4\pi\varrho$$

$\longrightarrow$

$$\phi(\vec{x}, t) = \int d^3x' \, \frac{\varrho(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

D.h. die Lösungen für ϕ sind durch das instantane Coulomb-Potential von $\varrho(\vec{x}, t)$ gegeben.

Das Vektorpotential erfüllt

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\vec{\nabla}\frac{\partial\phi}{\partial t}$$

Mit der Kontinuitätsgleichung $\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$ läßt sich der letzte Term allein durch $\vec{j}$ ausdrücken:

$$\vec{\nabla}\frac{\partial\phi}{\partial t} = -\vec{\nabla}\int d^3x' \frac{\vec{\nabla}_{x'}\cdot\vec{j}(\vec{x}',t)}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

Den Strom können wir eindeutig in einen longitudinalen (rotationsfreien) und transversalen (divergenzfreien) Anteil zerlegen:

$$\vec{j} = \vec{j}_L + \vec{j}_T \quad \text{mit} \quad \vec{\nabla}\times\vec{j}_L = 0 \quad \text{und} \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{j}_T = 0$$

Helmholtz'scher Satz $\longrightarrow$

$$\vec{j}_L = -\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\int d^3x' \frac{\vec{\nabla}_{x'}\cdot\vec{j}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

$$\vec{j}_T = \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\times\int d^3x' \frac{\vec{\nabla}_{x'}\times\vec{j}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\int d^3x' \frac{\vec{j}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

Im letzten Schritt haben wir partiell integriert, die Oberflächenterme als verschwindend angenommen und $\partial_x f(x-x') = -\partial_{x'} f(x-x')$ benutzt.

$\longrightarrow$

$$\vec{\nabla}\frac{\partial\phi}{\partial t} = 4\pi\,\vec{j}_L$$

$\longrightarrow$

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}_T$$

Die Quelle des Vektorpotentials ist damit rein transversal.

5.5 Das Retardierte Potential

Gesucht sind Lösungen der inhomogenen Wellengleichungen

$$\Delta\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -4\pi\varrho$$

Die Gleichungen für das Vektorpotential haben die gleiche Struktur, so daß wir nur die skalare Gleichung im Detail diskutieren müssen.

Zunächst läßt sich die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung schreiben als

$$\phi(x,t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(a(\vec{k})\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega t} + a^*(\vec{k})\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x} + i\omega t} \right)$$

mit $\omega = |\vec{k}|$ und $a(\vec{k})$ einer komplexwertigen Funktion).
(Beiträge mit $\omega = -|\vec{k}|$ lassen sich in dem komplex konjugierten Beitrag mit $\vec{k} \to \vec{k}$ absorbieren.)

Um eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung zu gegebenem $\varrho(x,t)$ zu erhalten, suchen wir eine Greensche Funktion $G(\vec{x},t;\vec{x}',t')$ mit

$$\left(\Delta_x - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G(\vec{x},t;\vec{x}',t') = -4\pi\, \delta^3(\vec{x}-\vec{x}')\,\delta(t-t')$$

so daß

$$\phi(\vec{x},t) = \int d^3x' \int dt'\; G(\vec{x},t;\vec{x}',t')\, \varrho(\vec{x}',t')$$

Die Bestimmungsgleichung für die Greensfunktion wird im Fourierraum algebraisch. Wir bemerken dazu, daß

$$\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')\,\delta(t-t') = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{d\omega}{2\pi}\; e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}\; e^{-i\omega(t-t')}$$

und schreiben

$$G(\vec{x},t;\vec{x}',t') = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{d\omega}{2\pi}\; e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}\; e^{-i\omega(t-t')}\; \tilde{G}(\vec{k},\omega)$$

$\longrightarrow$

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}\, e^{-i\omega(t-t')} \left[\left(-\vec{k}^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\hat{G}(\vec{k},\omega) + 4\pi\right] = 0$$

Die Fouriertransformation dieser Gleichung ergibt, daß der Term in eckigen Klammern verschwinden soll.

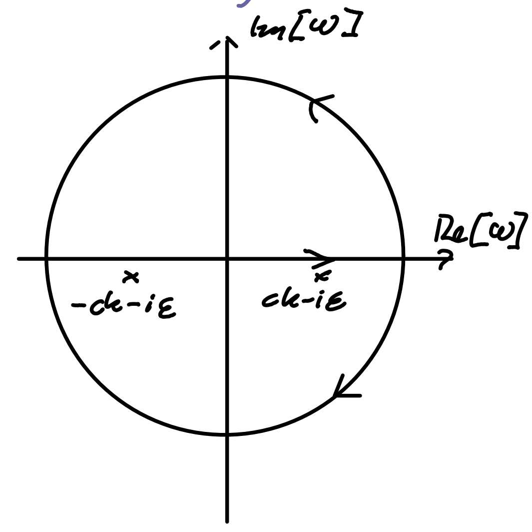
$\longrightarrow$

$$\hat{G}(\vec{k},\omega) = \frac{4\pi}{\vec{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$$

Die Rücktransformation ist ohne Weiteres nicht wohldefiniert wegen der Singularität für $|\omega| = |\vec{k}|c$. Allerdings verlangen wir, daß physikalisch die Greensfunktion dem elektromagnetischen Feld, welches von einer Punktquelle am Ort $\vec{x}'$, welche nur für eine kurze Zeit um t' vorhanden ist, ausgeht. Wir verlangen also, daß $G(\vec{x},t;\vec{x}',t') = 0$ für $t > t'$.

Führen wir nun zuerst die ω-Integration durch,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{-i\omega(t-t')}\, \frac{4\pi}{\vec{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$$



Gemäß des Cauchyschen Integralsatzes ist dies gleich dem Integral über einen der skizzierten halbkreisförmigen Wege, sofern das Integral über den Kreisbogen verschwindet (der Radius entspricht dem Grenzfall $|\omega| \to \infty$). Damit folgt:

Für $t > t'$ ist die Kontur in der unteren Halbebene zu schließen.

Für $t < t'$ ist die Kontur in der oberen Halbebene zu schließen.

Aus dem Integralsatz folgt auch, daß Integrale über geschlossene Kurven verschwinden, sofern der Integrand im Inneren holomorph ist (insbesondere keine Polstellen aufweist). Wir können die obige physikalische Bedingung also erfüllen, indem wir die beiden Polstellen infinitesimal in die untere Halbebene verschieben.

Wir berechnen also

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{-i\omega(t-t')} \frac{4\pi}{\vec{k}^2 - \frac{1}{c^2}(\omega+i\varepsilon)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \underbrace{e^{-i\omega(t-t')} \frac{2}{\left(|\vec{k}| - \frac{\omega+i\varepsilon}{c}\right)\left(|\vec{k}| + \frac{\omega+i\varepsilon}{c}\right)}}_{=f(\omega)}$$

$$\mathrm{Res}_{c|\vec{k}|-i\varepsilon} f(\omega) = \lim_{\omega \to c|\vec{k}|-i\varepsilon} (\omega - c|\vec{k}| + i\varepsilon)\, f(\omega) = -\frac{c}{|\vec{k}|}\, e^{-ic|\vec{k}|(t-t')}$$

$$\mathrm{Res}_{-c|\vec{k}|-i\varepsilon} f(\omega) = \lim_{\omega \to -c|\vec{k}|-i\varepsilon} (\omega + c|\vec{k}| - i\varepsilon)\, f(\omega) = \frac{c}{|\vec{k}|}\, e^{ic|\vec{k}|(t-t')}$$

Für $t' > t$ verschwindet das Integral.

Für $t > t'$:

Kontur im Uhrzeigersinn

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{-i\omega(t-t')} \frac{4\pi}{\vec{k}^2 - \frac{1}{c^2}(\omega+i\varepsilon)^2} = -\frac{2\pi i}{|\vec{k}|}\, c \left(e^{ic|\vec{k}|(t-t')} - e^{-ic|\vec{k}|(t-t')}\right)$$

$$= \frac{4\pi c}{|\vec{k}|} \sin\left(c|\vec{k}|(t-t')\right)$$

$\longrightarrow$

$$G = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} \frac{4\pi c}{|\vec{k}|} \sin\left(c|\vec{k}|(t-t')\right)$$

$$= \frac{c}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{1} d\cos\vartheta \int_0^{\infty} k\, dk\; e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|\cos\vartheta} \sin\left(ck(t-t')\right)$$

$$= \frac{c}{\pi} \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \int_0^{\infty} dk\, \frac{1}{i} \left(e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|} - e^{-ik|\vec{x}-\vec{x}'|}\right) \sin\left(ck(t-t')\right)$$

$$= \frac{2c}{\pi|\vec{x}-\vec{x}'|} \int_0^{\infty} dk\, \sin\left(k|\vec{x}-\vec{x}'|\right) \sin\left(ck(t-t')\right)$$

$$= \frac{c}{\pi|\vec{x}-\vec{x}'|}\int_{-\infty}^{\infty} dk \left(-\frac{1}{4}\right)\left(e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|} - e^{-ik|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)\left(e^{ick(t-t')} - e^{-ick(t-t')}\right)$$

Integrand gerade in k

$$= \frac{c}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|}\int_{-\infty}^{\infty} dk \Big(e^{ick(t-t')-ik|\vec{x}-\vec{x}'|} + e^{-ick(t-t')+ik|\vec{x}-\vec{x}'|} - e^{ick(t-t')+ik|\vec{x}-\vec{x}'|} - e^{-ick(t-t')-ik|\vec{x}-\vec{x}'|} \Big)$$

$$= \frac{c}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|}\, 2\pi \Big(2\,\delta\big(c(t-t') - |\vec{x}-\vec{x}'|\big) - 2\underbrace{\delta\big(c(t-t') + |\vec{x}-\vec{x}'|\big)}_{\equiv 0 \text{ da } t>t'} \Big)$$

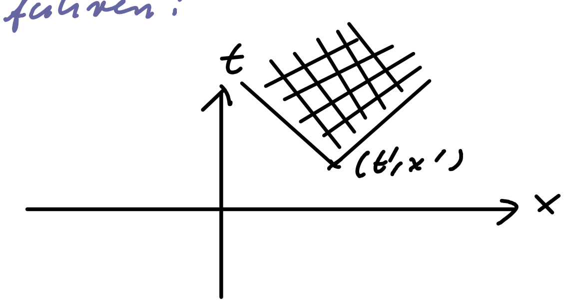
$$= \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\,\delta\left(t-t'-\frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c}\right)$$

Insgesamt lautet also die

Retardierte Greensfunktion

$$G(\vec{x},t;\vec{x}',t') = \frac{\delta\left(t-t'-\frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c}\right)}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

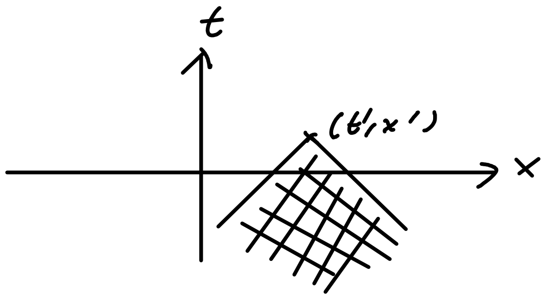
Eine zur Zeit t' am Ort $\vec{x}'$ vorhandene Quelle kann also zu elektromagnetischen Feldern im Zukunftslichtkegel führen:



Die übrigen Bereiche der Raumzeit sind für diese spezielle Lösung feldfrei. Daß die Quelle nur an Beobachter innerhalb des Zukunftslichtkegels Signale senden kann, bezeichnet man als Kausalität.

Wir merken noch an, daß auch die avancierte

Greensfunktion $G(\vec{x},t;\vec{x}',t') = \dfrac{\delta\left(t-t'+\frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c}\right)}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$ deren Fouriertransformierte Pole in der oberen Halbebene hat,



zu Lösungen der Maxwellgleichungen führt. Schalten wir die Quelle zum Zeitpunkt t' aus, so werden in der speziellen Lösung sämtliche aus dem Vergangenheitslichtkegel von $|\vec{x}| \longrightarrow \infty$ einfallenden Wellen absorbiert. Diese Randbedingungen sind in der klassischen Physik allerdings nicht von praktischer Relevanz. In Quantensystemen (explizit wird dies vor allem in der Quantenfeldtheorie) ist allerdings auch die avancierte Greensfunktion von wesentlicher Bedeutung.

5.6 Strahlung zeitlich veränderlicher Ladungs- und Stromdichten

Betrachte
$$\rho(\vec{x},t) = \rho(\vec{x})\, e^{-i\omega t}$$
$$\vec{j}(\vec{x},t) = \vec{j}(\vec{x})\, e^{-i\omega t}$$

Wir können diese als Fourierkomponenten allgemeiner Verteilungen auffassen. Die tatsächlichen Verteilungen sind selbstverständlich reell.

In Lorenz-Eichung erhalten wir dann für retardierte Randbedingungen:

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \frac{1}{c}\int d^3x' \int dt' \, \frac{\vec{j}(\vec{x}',t')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\, \delta\left(t-t'-\frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c}\right)$$

$$= e^{-i\omega t}\, \frac{1}{c}\int d^3x' \, \frac{e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\, \vec{j}(\vec{x}') \quad \text{mit} \quad k = \frac{\omega}{c}$$

Daraus erhalten wir $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ sowie

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{i\omega}{c}\vec{B} = ik\,\vec{B} = ik\,\vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Im quellfreien Gebiet ist dann

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla}\,\underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{E}}_{=0} - \Delta \vec{E} = k^2 \vec{E} = ik\,\vec{\nabla} \times \vec{B}$$

$$\longrightarrow \vec{E} = \frac{i}{k}\vec{\nabla} \times \vec{B}$$

Die Wellenlänge der Strahlung ist $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$, die Größe der Quelle sei $\sim d$, und es gelte $\lambda \gg d$ (typischer Fall, wenn die Ladungen sich nicht selbst nahe der Lichtgeschwindigkeit bewegen). Wir betrachten dann Näherungen für folgende charakteristische Abstände:

Nahzone (statische Zone): $d \ll x \ll \lambda$
Mittlere Zone (Induktionszone): $d \ll x \sim \lambda$
Fernzone (Strahlungszone): $d \ll \lambda \ll x$

Nahzone:

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{c}\int d^3x' \, \frac{e^{i\frac{\omega}{c}\overbrace{|\vec{x}-\vec{x}'|}^{\ll\lambda}}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\,\vec{j}(\vec{x}') \approx \frac{1}{c}\int d^3x' \, \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} \frac{4\pi}{2l+1}\,\frac{Y_{lm}(\vartheta,\varphi)}{x^{l+1}} \int d^3x'\, Y^*_{lm}(\vartheta',\varphi')\, x'^{l}\, \vec{j}(\vec{x}')$$

Das Feld folgt hier also quasistatisch der Ladungsverteilung.

Fernzone:

$$|\vec{x} - \vec{x}'| \approx |\vec{x}| - \hat{x} \cdot \vec{x}'$$

Zur führenden Ordnung in $\frac{d}{x}$:

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{e^{ikx}}{cx} \int d^3x' \, e^{-ik\,\hat{x}\cdot\vec{x}'} \, \vec{j}(\vec{x}')$$

$$= \frac{e^{ikx}}{cx} \sum_n \frac{(-ik)^n}{n!} \int d^3x' \, (\hat{x}\cdot\vec{x}')^n \, \vec{j}(\vec{x}')$$

Die Reihe konvergiert schnell aufgrund der Annahme $d \sim x' \ll \lambda = \frac{2\pi}{k}$.

Dipolstrahlung

Wir benutzen die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0 = -i\omega\varrho + \vec{\nabla}\cdot\vec{j}$$

und formen zunächst um

$$\int d^3x' \, \vec{j}(\vec{x}') = -\int d^3x' \, \vec{x}' \, (\vec{\nabla}'\cdot\vec{j}(\vec{x}')) = -i\omega \int d^3x' \, \vec{x}' \varrho(\vec{x}') = -i\omega \underbrace{\vec{p}}_{\text{el. Dipolmoment}}$$

Der führende Term obiger Entwicklung ist dann

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{e^{ikx}}{cx} \int d^3x' \, \vec{j}(\vec{x}') = -ik\,\vec{p}\,\frac{e^{ikx}}{x}$$

Wir erhalten dann die elektrischen Dipolfelder

$$\vec{\nabla} x = \frac{\vec{x}}{x}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = ik\,\vec{p}\times\left(-\frac{\vec{x}\,e^{ikx}}{x^3} + ik\frac{\vec{x}\,e^{ikx}}{x^2}\right)$$

$$= ik\,\vec{x}\times\vec{p}\,\frac{e^{ikx}}{x^3} + k^2\,\vec{x}\times\vec{p}\,\frac{e^{ikx}}{x^2}$$

$$= k^2(\hat{x}\times\vec{p})\frac{e^{ikx}}{x}\left(1 - \frac{1}{ikx}\right)$$

$$[(\vec{p}\cdot\vec{\nabla})\vec{x}]_i = p_j \nabla_j x_i = p_j \delta_{ij} = p_i$$

$$\vec{E} = \frac{i}{k}\,\vec{\nabla}\times\vec{B} = -\vec{\nabla}\times(\vec{x}\times\vec{p})\frac{e^{ikx}}{x^3} + ik\,\vec{\nabla}\times(\vec{x}\times\vec{p})\frac{e^{ikx}}{x^2}$$

$$= \left(ik\frac{e^{ikx}}{x^2} - \frac{e^{ikx}}{x^3}\right)\underbrace{\vec{\nabla}\times(\vec{x}\times\vec{p})} - (\vec{x}\times\vec{p})\times\vec{\nabla}\left(ik\frac{e^{ikx}}{x^2} - \frac{e^{ikx}}{x^3}\right)$$

$$= \vec{x}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{p} + (\vec{p}\cdot\vec{\nabla})\vec{x} - \vec{p}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{x} = \vec{p} - 3\vec{p} = -2\vec{p}$$

$$-(\vec{x}\times\vec{p})\times\vec{x} = \vec{x}\times(\vec{x}\times\vec{p})$$
$$= \vec{x}\cdot(\vec{x}\cdot\vec{p}) - \vec{p}\, x^2$$

$$= 2\vec{p}\left(\frac{e^{ikx}}{x^3} - ik\frac{e^{ikx}}{x^2}\right)$$

$$-(\vec{x}\times\vec{p})\times\left(ik\,(-2)\frac{\vec{x}}{x^4} - k^2\frac{\vec{x}}{x} - (-3)\frac{\vec{x}}{x^5} - ik\frac{\vec{x}}{x^4}\right)e^{ikx}$$

$$= 3\vec{p}\left(\frac{e^{ikx}}{x^3} - ik\frac{e^{ikx}}{x^2}\right)$$

$$+ k^2(\vec{x}\times\vec{p})\times\vec{x}\,\frac{e^{ikx}}{x^3} + \vec{x}\cdot(\vec{x}\cdot\vec{p})\left(3\frac{1}{x^5} - 3ik\frac{1}{x^4}\right)e^{ikx}$$

$$-3\vec{p}\,x^2\left(\frac{1}{x^5} - ik\frac{1}{x^4}\right)e^{ikx}$$

$$= k^2(\vec{x}\times\vec{p})\times\vec{x}\,\frac{e^{ikx}}{x^3} + \left[3\,\vec{x}\cdot(\vec{x}\cdot\vec{p}) - \vec{p}\,\vec{x}^2\right]\left(\frac{1}{x^5} - \frac{ik}{x^4}\right)e^{ikx}$$

In der Fernzone ist außerdem $\frac{1}{kx} \ll 1$, so daß wir nähern können

$$\vec{B} = k^2\,\hat{x}\times\vec{p}\,\frac{e^{ikx}}{x}, \qquad \vec{E} = k^2(\hat{x}\times\vec{p})\times\hat{x}\,\frac{e^{ikx}}{x} = \vec{B}\times\hat{x}$$

Im umgekehrten Fall der Nahzone sind die führenden Beiträge

$$\vec{E} = \frac{3\vec{x}\cdot(\vec{x}\cdot\vec{p}) - \vec{p}\,x^2}{x^5}\,e^{ikx}, \qquad \vec{B} = ik\,\frac{\vec{x}\times\vec{p}}{x^3}\,e^{ikx}$$

d.h. wir finden insbesondere den quasistatischen elektrischen Dipol wieder. Im statischen Grenzfall $k\to 0$ verschwindet auch das Magnetfeld.

Wir betrachten nun die abgestrahlte Leistung in der Fernzone.

Durch Kugelflächenelement abgestrahlte Leistung:

$$dP = \vec{S}\cdot\hat{x}\;x^2\,\underbrace{\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi}_{=d\Omega}$$

$\longrightarrow$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi} x^2 \hat{x} \cdot (\vec{E} \times \vec{B})$$

Dabei sind die Realteile der Felder zu nehmen. Wir müssen dann noch zeitlich über $\sin^2 \omega t$ mitteln, was einen zusätzlichen Faktor $\frac{1}{2}$ ergibt. Mit obigen Resultaten erhalten wir so

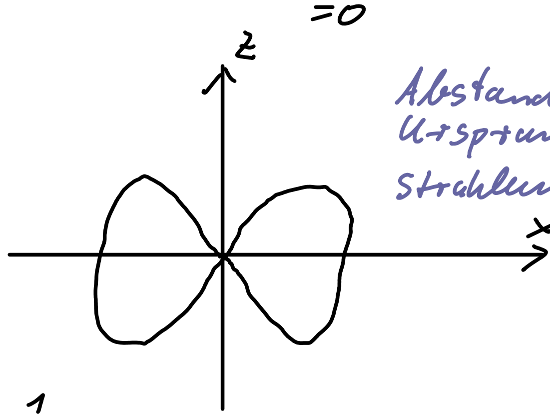
$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c}{8\pi} x^2 \hat{x} \cdot ((\vec{B} \times \hat{x}) \times \vec{B}) = \frac{c}{8\pi^2} x^2 \hat{x} \cdot \left(\hat{x} \vec{B}^2 - \vec{B} \hat{x} \cdot \vec{B} \right)$$

$$= \frac{c}{8\pi} k^4 \hat{x} \cdot \left(\hat{x} (\hat{x} \times \vec{p})^2 - (\hat{x} \times \vec{p}) \underbrace{\hat{x} \cdot (\hat{x} \times \vec{p})}_{=0} \right)$$

$$= \frac{c}{8\pi} k^4 (\hat{x} \times \vec{p})^2$$

Für $\vec{p} \parallel \hat{z}$:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c}{8\pi} k^4 \vec{p}^2 \sin^2 \vartheta$$



Abstand vom Ursprung entspricht Strahlungsleistung

Gesamtleistung

$$P = 2\pi \int_{-1}^{1} d\cos\vartheta \, \frac{dP}{d\Omega} = \frac{c}{4} k^4 \int_{-1}^{1} d\xi \, (1 - \xi^2) \vec{p}^2 = \frac{c}{3} k^4 \vec{p}^2$$

Man bemerke hier das charakteristische Verhalten $\propto \omega^4$ und auch, daß in der Fernzone die Feldstärken $\sim \frac{1}{x}$ und die Energieflußdichte $\sim \frac{1}{x^2}$ abnehmen. In der Richtung des Dipols bleibt der Raum feldfrei.

Magnetische Dipol- und elektrische Quadrupolstrahlung

Wir betrachten nochmals

$$|\vec{x} - \vec{x}'| \approx |\vec{x}| - \hat{x} \cdot \vec{x}'$$

und

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{e^{ikx}}{cx} \int d^3x' \left(1 + \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{\vec{x}^2}\right) e^{-ik\,\hat{x}\cdot\vec{x}'} \vec{j}(\vec{x}')$$

$$= \frac{e^{ikx}}{cx} \int d^3x' \left(\vec{j}(\vec{x}') + \frac{\vec{x}\cdot\vec{x}'}{x^2} \vec{j}(\vec{x}) - ik \frac{\vec{x}\cdot\vec{x}'}{x} \vec{j}(\vec{x}') + \dots \right)$$

wobei wir den Nennerterm eine Ordnung weiter entwickelt haben. Im folgenden betrachten wir die nachführenden (jenseits des elektrischen Dipols) Beiträge zum Vektorpotential

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{e^{ikx}}{cx} \left(\frac{1}{x} - ik \right) \int d^3x' \, (\hat{x}\cdot\vec{x}') \, \vec{j}(\vec{x}')$$

$$\frac{1}{c} (\hat{x}\cdot\vec{x}') \vec{j} = \underbrace{\frac{1}{2c} \left[(\hat{x}\cdot\vec{x}') \vec{j} + (\hat{x}\cdot\vec{j}) \vec{x}' \right]}_{\text{symmetrisch in } \vec{x}' \leftrightarrow \vec{j}} + \underbrace{\frac{1}{2c} (\vec{x}' \times \vec{j}) \times \hat{x}}_{\text{antisymmetrisch in } \vec{x}' \leftrightarrow \vec{j}}$$

Der zweite Term enthält die von der Stromverteilung erzeugten Magnetisierung (→ magnetische Dipolmomentdichte)

$$\vec{M}(\vec{x}') = \frac{1}{2c} \vec{x}' \times \vec{j}(\vec{x}')$$

Den ersten Term werden wir mit dem elektrischen Quadrupoltensor in Beziehung bringen.

Die magnetischen Dipolterme ergeben

$$\vec{A}^{(B1)}(\vec{x}) = -\frac{e^{ikx}}{x} \left(\frac{1}{x} - ik \right) \hat{x} \times \underbrace{\int d^3x' \, \vec{M}(\vec{x}')}_{=\vec{m}}$$

$$= ik \, \hat{x} \times \vec{m} \, \frac{e^{ikx}}{x} \left(1 - \frac{1}{ikx} \right)$$

Dies hat die gleiche Form wie das vom Dipol erzeugte Magnetfeld, dessen Rotation nach dem Induktionsgesetz das elektrische Dipolfeld erzeugt. Analog zu obiger Rechnung folgt also:

$$\vec{B}^{(B1)} = \vec{\nabla} \times \vec{A}^{(B1)}$$

$$= k^2 (\vec{x} \times \vec{m}) \times \vec{x} \frac{e^{ikx}}{x^3} + \left[3\vec{x} \cdot (\vec{x} \cdot \vec{m}) - \vec{m}\, \vec{x}^2 \right] \left(\frac{1}{x^5} - \frac{ik}{x^4} \right) e^{ikx}$$

Das zur magnetischen Dipolquelle gehörige elektrische Feld ergibt sich dann aus dem magnetischen Feld für die elektrische Dipolquelle mit $\vec{p} \to \vec{m}$ und einem negativen Vorzeichen:

$$\vec{E}^{(B1)} = -k^2 (\hat{x} \times \vec{m}) \frac{e^{ikx}}{x} \left(1 - \frac{1}{ikx} \right)$$

Nun zu den elektrischen Quadrupoltermen (E2).

$$\left[\int d^3x'\, \vec{x}' (\hat{x} \cdot \vec{x}') \vec{\nabla}' \cdot \vec{j} \right]_i = \int d^3x'\, x'_i\, \hat{x}_j\, x'_j\, \nabla_k j_k$$

$$= - \int d^3x' \left(\delta_{ik}\, \hat{x}_j\, x'_j\, j_k + \delta_{jk}\, x'_i\, \hat{x}_j\, j_k \right)$$

$$= - \int d^3x' \left(j_i\, \hat{x} \cdot \vec{x}' + x'_i\, \hat{x} \cdot \vec{j} \right)$$

$\longrightarrow$

$$\frac{1}{2c} \int d^3x' \left[(\hat{x} \cdot \vec{x}') \vec{j} + (\hat{x} \cdot \vec{j}) \vec{x}' \right] = -\frac{1}{2c} \int d^3x'\, \vec{x}' (\hat{x} \cdot \vec{x}') \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{j}}_{= i\omega\varrho}$$

$$= -\frac{ik}{2} \int d^3x'\, \vec{x}' (\hat{x} \cdot \vec{x}') \varrho$$

$\longrightarrow$

$$\vec{A}^{(E2)}(\vec{x}) = \frac{e^{ikx}}{x} \left(\frac{1}{x} - ik \right) \left(-\frac{ik}{2} \right) \int d^3x'\, \vec{x}' (\hat{x} \cdot \vec{x}') \varrho$$

$$= -\frac{k^2}{2} \frac{e^{ikx}}{x} \left(1 - \frac{1}{ikx} \right) \int d^3x'\, \vec{x}' (\hat{x} \cdot \vec{x}') \varrho$$

Wir geben die Felder in der Fernzone an – dabei ergeben sich die führenden Terme aus den Ableitungen der Exponentialfunktion:

$$\vec{\nabla} e^{ikx} = ik\,\hat{x}\,e^{ikx}$$

$\longrightarrow$

$$\vec{B} = ik\,\hat{x}\times\vec{A}$$

$$\vec{E} = \frac{i}{k}(ik)^2\hat{x}\times(\hat{x}\times\vec{A}) = ik\,(\hat{x}\times\vec{A})\times\hat{x}$$

$\longrightarrow$

$$\vec{B}^{(E2)} = -\frac{ik^3}{2}\frac{e^{ikx}}{x}\int d^3x'\,(\hat{x}\times\vec{x}')(\hat{x}\cdot\vec{x}')\,\varrho(\vec{x}')$$

Wir erinnern an den Quadrupoltensor

$$Q_{ij} = \int d^3x\,(3x_ix_j - x^2\delta_{ij})\,\varrho(\vec{x})$$

und definieren

$$[\vec{Q}(\hat{x})]_i = Q_{ij}\hat{x}_j$$

$\longrightarrow$

$$\left[\frac{1}{3}\hat{x}\times\vec{Q}(\hat{x})\right]_i = \frac{1}{3}\varepsilon_{ijk}\hat{x}_j Q_{kl}\hat{x}_l$$

$$= \frac{1}{3}\int d^3x'\,\varepsilon_{ijk}\hat{x}_j\,(3x'_kx'_l - x'^2\delta_{kl})\hat{x}_l\,\varrho(\vec{x}')$$

$$= \frac{1}{3}\int d^3x'\left(3(\hat{x}\times x')_i(\hat{x}\cdot x') - \underbrace{(\hat{x}\times\hat{x}_l)_i}_{=0}x'^2\right)\varrho(\vec{x}')$$

$\longrightarrow$

$$\vec{B}^{(E2)} = -\frac{ik^3}{6}\frac{e^{ikx}}{x}\,\hat{x}\times\vec{Q}(\hat{x})$$

Für den Poyntingvektor benutzen wir folgende Nebenrechnungen:

$$[\vec{a}\times\vec{V}]^2 = \varepsilon_{ijk}a_jV_k\,\varepsilon_{ilm}a_lV_m = (\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl})\,a_jV_k\,a_lV_m$$

$$= \vec{a}^2\vec{V}^2 - (\vec{a}\cdot\vec{V})^2$$

$$\longrightarrow [\hat{x}\times\vec{V}]^2 = \vec{V}^2 - (\hat{x}\cdot\vec{V})^2$$

$$(\vec a \times \vec V)\times \vec a = \vec V\, \vec a^{\,2} - \vec a\; \vec a\cdot \vec V \longrightarrow (\hat x \times \vec V)\times \hat x = \vec V - \hat x\; \hat x \cdot \vec V$$

$$\longrightarrow [(\hat x \times \vec V)\times \hat x]^2 = \vec V^{\,2} - 2\,\hat x\cdot \vec V\; \hat x \cdot \vec V + (\hat x \cdot \vec V)^2 = [\hat x \times \vec V]^2$$

$\longrightarrow$ Die vom $\vec E$-Feld transportierte Leistung ist gleich der vom $\vec B$-Feld.

$$\vec S = \frac{c}{4\pi}(\vec E \times \vec B) = \frac{c}{4\pi}\left((\vec B \times \hat x)\times \vec B\right) = \frac{c}{4\pi}\left(\hat x\, \vec B^{\,2} - \vec B\; \hat x \cdot \vec B\right)$$

$$\hat x \cdot \vec S = \frac{c}{4\pi}\left(\vec B^{\,2} - (\hat x \cdot \vec B)^2\right) = \frac{c}{4\pi}(\vec B \times \hat x)^2$$

Dies ist wieder zeitlich zu mitteln, wobei der Realteil von $\vec B$ zu nehmen ist. $\longrightarrow$

$$\hat x \cdot \vec S = \frac{1}{2}\,\frac{c}{4\pi}\,\frac{k^6}{36}\,\frac{1}{x^2}\left((\hat x \times \vec Q(\hat x))\times \hat x\right)^2 = \frac{c k^6}{288\pi x^2}\left(\hat x \times \vec Q(\hat x)\right)^2$$

$\longrightarrow$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \vec S \cdot \hat x \;\; x^2 = \frac{c k^6}{288\pi}\left(\hat x \times \vec Q(\hat x)\right)^2$$

$$\left(\hat x \times \vec Q(\hat x)\right)^2 = \vec Q^{\,2} - (\hat x \cdot \vec Q)^2 = Q_{ij}\hat x_j\, Q_{ik}\hat x_k - \hat x_i Q_{ij}\hat x_j\, \hat x_k Q_{kl}\hat x_l$$

Um das Winkelintegral auszuwerten, bemerken wir:

$$\int d\Omega = 4\pi$$

$$\int d\Omega\, \hat x_i \hat x_j = \alpha\, \delta_{ij} \xrightarrow[\sum_{i,j}]{} 4\pi = 3\alpha \Longrightarrow \alpha = \frac{4\pi}{3} \Longrightarrow$$

$$\int d\Omega\, \hat x_i \hat x_j = \frac{4\pi}{3}$$

$$\int d\Omega\, \hat x_i \hat x_j \hat x_k \hat x_l = \alpha\left(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right) \xrightarrow[\sum_{ijkl}]{}$$

$$\int d\Omega\left(\underbrace{(\hat x_1^2 + \hat x_2^2 + \hat x_3^2)}_{=1}{}^2 + 4\sum_{\substack{i\\ j\neq i}} \hat x_i^2 \hat x_j^2\right) = 27\alpha$$

Betrachte o. B. d. A. $i=1,\ j=2$:

$$\int d\Omega\ \hat{x}_1^2 \hat{x}_2^2 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{1} d\cos\vartheta\ \sin^4\vartheta\ \cos^2\varphi \sin^2\varphi$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_{-1}^{1} d\xi\ (1-\xi^2)^2 = \frac{\pi}{4}\,\frac{16}{15} = \frac{4\pi}{15}$$

$$\longrightarrow 4\pi + 4\binom{3}{2}\frac{4\pi}{15} = 4\pi + \frac{16}{5}\pi = \frac{36\pi}{5} = 27\alpha \implies \alpha = \frac{4\pi}{15}$$

$\longrightarrow$

$$\int d\Omega\ \hat{x}_i \hat{x}_j \hat{x}_k \hat{x}_l = \frac{4\pi}{15}\left(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right)$$

$$\int d\Omega \left(\hat{x} \times \vec{Q}(\hat{x})\right)^2 = \frac{4\pi}{3} Q_{ij}Q_{ij} - \frac{4\pi}{15}\left(Q_{ii}Q_{kk} + Q_{ij}Q_{ij} + Q_{ij}Q_{ji}\right)$$

$$= \frac{4\pi}{5} Q_{ij}Q_{ij} \qquad \frac{20}{15}$$

↑ Q ist symmetrisch und spurfrei

$$P = \frac{ck^6}{288\pi}\,\frac{4\pi}{5}\, Q_{ij}Q_{ij} = \frac{ck^6}{360} Q_{ij}Q_{ij}$$

Die Leistung ist also proportional zu ω^6 (Dipol: ω^4).

Als Beispiel geben wir ein um die z-Achse symmetrisches, oszillierendes Rotationsellipsoid mit konstanter Ladungs=verteilung an. Dann hat der Quadrupoltensor die Gestalt

$$Q_{33} = Q_0, \quad Q_{11} = Q_{22} = -\frac{1}{2}Q_0, \quad Q_{ij} = 0 \text{ für } i \neq j$$

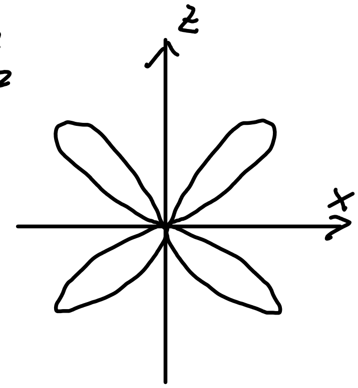
$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{ck^6}{288\pi} Q_{ij}\hat{x}_j Q_{ik}\hat{x}_k - \hat{x}_i Q_{ij}\hat{x}_j \hat{x}_k Q_{kl}\hat{x}_l$$

$$= \frac{ck^6}{288\pi} Q_0^2 \Big(\hat{x}_3\hat{x}_3 + \frac{1}{4}\hat{x}_1\hat{x}_1 + \frac{1}{4}\hat{x}_2\hat{x}_2$$

$$- \hat{x}_3 \hat{x}_3 \hat{x}_3 \hat{x}_3 - \frac{1}{4} \hat{x}_1 \hat{x}_1 \hat{x}_1 \hat{x}_1 - \frac{1}{4} \hat{x}_2 \hat{x}_2 \hat{x}_2 \hat{x}_2$$

$$+ \hat{x}_3 \hat{x}_3 (\hat{x}_1 \hat{x}_1 + \hat{x}_2 \hat{x}_2) - \frac{1}{2} \hat{x}_1 \hat{x}_1 \hat{x}_2 \hat{x}_2)$$

$$= \frac{ck^6}{288\pi} Q_0^2 \frac{9}{4} \cos^2\vartheta \sin^2\vartheta = \frac{ck^6}{128\pi} Q_0^2 \cos^2\vartheta \sin^2\vartheta$$



$$P = \frac{ck^6}{360} Q_0^2 \left(1 + 2 * \frac{1}{4}\right) = \frac{ck^6}{240} Q_0^2$$

In der Quantenmechanik zeigt sich, daß Übergänge zwischen bestimmten Energieniveaus jeweils Multipolstrahlung eines bestimmten Typs emittieren. Dabei haben Übergänge zu niedrigen Multipolen eine geringere Lebensdauer als für hohe Multipole. So entspricht die berühmte HI (21 cm) Linie von Wasserstoff mit einer Zerfallsrate von $2{,}9 * 10^{-15}\,s^{-1}$ einem magnetischen Dipolübergang (B1).