

4. Elektrische und magnetische Felder in polarisierbarer Materie

4.1 Gemittelte Elektrische Felder

Bislang: Elektro- und Magnetostatik im Vakuum

→ grundlegende Gleichungen für mikroskopische Felder (d.h. diese behalten ihre Gültigkeit bis zu sehr kleinen Skalen, wo wir zur quantenphysikalischen Beschreibung der Atom-, Kern- und Teilchenphysik übergehen)

In vielen praktischen Problemen ist Materie präsent, Gase, Flüssigkeiten, Festkörper, welche aus einer Vielzahl geladener (Atome und Kerne) Konstituenten oder solchen mit elektrischen Dipolmomenten (Moleküle) besteht. Statt diese einzeln aufzulösen

→ benutze „makroskopische“ (gemittelte, phänomenologische, ...) Gleichungen & Größen.

Wir benutzen in diesem Abschnitt zunächst neue Symbole für das mikroskopische elektrische Feld, $\vec{E} \rightarrow \vec{E}'$ und die mikroskopische Ladungsdichte, $e \rightarrow e'$.

→ mikroskopische Maxwellgleichungen der Elektrostatik:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}' &= 4\pi e' \\ \vec{\nabla} \times \vec{E}' &= 0 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \vec{E}'(\vec{x}) = \int d^3x' \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} e'(\vec{x}')$$

Mittelung über Volumen ΔV mit großer Zahl Atome:

$$\langle \vec{E}'(\vec{x}) \rangle = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} d^3\xi \vec{E}'(\vec{x} + \vec{\xi})$$

$$\langle E'(\vec{x}) \rangle = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} d^3 \xi E'(\vec{x} + \vec{\xi})$$

Numeriere die Moleküle in ΔV mit j , Ladungen e_j und Dipolmomente \vec{p}_j . Vernachlässige höhere Multipole.

→ Mikroskopisches Feld:

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla} \sum_j \left(\frac{e_j}{|\vec{x} - \vec{x}_j|} + \frac{\vec{p}_j \cdot (\vec{x} - \vec{x}_j)}{|\vec{x} - \vec{x}_j|^3} \right) = -\vec{\nabla} \sum_j \left(\frac{e_j}{|\vec{x} - \vec{x}_j|} + \vec{p}_j \cdot \vec{\nabla}_{\vec{x}_j} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_j|} \right)$$

$$\text{definiere } E_{\text{mol}}(\vec{x}) = \sum_j e_j \delta(\vec{x} - \vec{x}_j)$$

$$\vec{P}_{\text{mol}}(\vec{x}) = \sum_j \vec{p}_j \delta(\vec{x} - \vec{x}_j)$$

→

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla} \int d^3 x'' \left(\frac{E_{\text{mol}}(\vec{x}'')}{|\vec{x} - \vec{x}''|} + \vec{P}_{\text{mol}}(\vec{x}'') \cdot \frac{\vec{x} - \vec{x}''}{|\vec{x} - \vec{x}''|^3} \right)$$

Gemitteltes Feld:

$$\begin{aligned} \langle \vec{E}(\vec{x}) \rangle &= \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} d^3 \xi \int d^3 x'' \left(\frac{E_{\text{mol}}(\vec{x}'')}{|\vec{x} + \vec{\xi} - \vec{x}''|} + \vec{P}_{\text{mol}}(\vec{x}'') \cdot \frac{\vec{x} + \vec{\xi} - \vec{x}''}{|\vec{x} + \vec{\xi} - \vec{x}''|^3} \right) \\ &= \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} d^3 \xi \int d^3 x'' \left(\frac{E_{\text{mol}}(\vec{x}'' + \vec{\xi})}{|\vec{x} - \vec{x}''|} + \vec{P}_{\text{mol}}(\vec{x}'' + \vec{\xi}) \cdot \frac{\vec{x} - \vec{x}''}{|\vec{x} - \vec{x}''|^3} \right) \end{aligned}$$

Ist $n(\vec{x})$ die Anzahldichte der Moleküle und $\langle E_{\text{mol}}(\vec{x}) \rangle$, $\langle \vec{P}_{\text{mol}}(\vec{x}) \rangle$ deren durchschnittliche Ladung bzw. Polarisation, dann können wir schreiben

$$\frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} d^3 \xi E_{\text{mol}}(\vec{x} + \vec{\xi}) = n(\vec{x}) \langle E_{\text{mol}}(\vec{x}) \rangle$$

$$\frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} d^3 \xi \vec{\Pi}_{\text{mol}}(\vec{x} + \vec{\xi}) = n(\vec{x}) \langle \vec{p}_{\text{mol}}(\vec{x}) \rangle$$

→

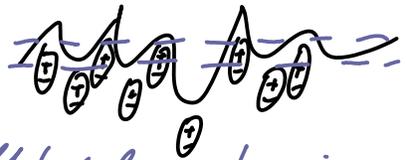
$$\langle \vec{E}(\vec{x}) \rangle = -\vec{\nabla} \int d^3 x' n(\vec{x}') \left(\frac{\langle l_{\text{mol}}(\vec{x}') \rangle}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \langle \vec{p}_{\text{mol}}(\vec{x}') \rangle \cdot \vec{\nabla}_{x'} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right)$$

Um zum Gauß'schen Gesetz für das gemittelte Feld zu gelangen, bilden wir die Divergenz

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \langle \vec{E}(\vec{x}) \rangle &= 4\pi \int d^3 x' n(\vec{x}') \left(\langle l_{\text{mol}}(\vec{x}') \rangle \delta(\vec{x} - \vec{x}') + \langle \vec{p}_{\text{mol}}(\vec{x}') \rangle \cdot \vec{\nabla}_{x'} \delta(\vec{x} - \vec{x}') \right) \\ &= 4\pi n(\vec{x}) \langle l_{\text{mol}}(\vec{x}) \rangle - 4\pi \vec{\nabla} \cdot (n(\vec{x}) \langle \vec{p}_{\text{mol}}(\vec{x}) \rangle) \end{aligned}$$

Offenbar bedeutet der erste Term, daß wir über einzelne Ladungen mitteln können (z.B. positive & negative Ionen im Salzkristall). In vielen Fällen mitteln sich diese Ladungen zu Null. Der zweite Term führt zur Änderung des makroskopischen elektrischen Feldes, sofern die gemittelte Polarisation sich räumlich ändert.

Als typischen Fall denke man an die Grenzfläche eines polarisierten Materials. Im inneren heben sich die Dipolbeiträge heraus während in einem Streifen in der Nähe des Randes ein Ladungsüberschuß vorhanden sein kann. Dieser Sachverhalt wird durch den zweiten Beitrag also in differentieller Form ausgedrückt.



Polarisations- und Ladungsdichte:

$$\vec{P} = n \langle \vec{p}_{\text{mol}} \rangle$$

→ freie Ladungen

$$e = \underbrace{n \langle l_{\text{mol}} \rangle}_{\text{oft gleich Null}} + e_{\text{ex}}$$

Dabei haben wir eine freie Ladungsdichte ρ_{ex} hinzugefügt. Aufgrund der Linearität geht diese additiv in Gauß'sche Gesetz ein.

Außerdem verwenden wir in den makroskopischen Gleichungen $\vec{E} \equiv \langle \vec{E} \rangle$ für das gemittelte Feld. Die Kraft $\vec{F} = \vec{E} q$ ist dann die Kraft, welche z.B. eine makroskopischer, geladener Kugel (Ladung q) in einem polarisierbaren Gas erfährt.

Elektrische Flussdichte oder dielektrische Verschiebung:

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P}$$

Damit wird das Gauß'sche Gesetz zu

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} + 4\pi n \langle \vec{P}_{mol} \rangle) = 4\pi n \langle \rho_{mol} \rangle + 4\pi \rho_{ex} \iff$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi \rho$$

Das makroskopische elektrische Feld ist immer noch ein Gradientenfeld (s.o.) \implies

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

Insgesamt ergibt sich das makroskopische elektrische Feld aus den hier definierten mittleren Ladungs- und Polarisationsdichten als

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla} \int d^3x' \left(\frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \vec{P}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right)$$

4.2 Phänomenologische Dielektrika und Randbedingungen

Ähnlich den Permanentmagneten lassen sich Materialien mit einer Polarisationsdichte $\vec{P} \neq 0$ erzeugen, was

allerdings schwieriger ist als im magnetischen Fall. Auch wenn diese sogenannten Elektroete z.B. in Mikrofonen recht verbreitet sind, übergehen wir dies hier. In der Tat ist für die meisten Materialien $\vec{P} = 0$ falls $\vec{E} = 0$. Andernfalls können wir entwickeln:

$$P_i = \sum_j a_{ij} E_j + \sum_{jk} b_{ijk} E_j E_k + \dots$$

Typische zwischenatomare Felder sind $10^9 \frac{V}{cm}$ - viel größer als technisch realisierbare statische makroskopische Felder. Diese stellen für das Material also nur eine kleine Störung dar, so daß die lineare Näherung völlig ausreichend ist.

Allgemeiner Fall:

Anisotrope Materialien (z.B. Calcit und Quarz)

→ man kann zeigen, daß a_{ij} ein symmetrischer Tensor ist, d.h. sechs Freiheitsgrade hat.

Für die meisten Substanzen, insbesondere solche mit ungeordneten Molekülen / Atomen / Ionen ist a_{ij} proportional zur Einheitsmatrix (Isotropie) →

$$\vec{P} = \chi_e \vec{E}$$

mit der elektrischen Suszeptibilität χ_e .

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P} = (1 + 4\pi \chi_e) \vec{E} = \epsilon \vec{E}$$

mit der dielektrischen Konstanten $\epsilon = 1 + 4\pi \chi_e$

Ist das Material nicht nur isotrop sondern auch uniform, dann ist ϵ ortsunabhängig.

$$\vec{D} \cdot \vec{D} = 4\pi e \quad \longrightarrow \quad \vec{D} \cdot \vec{E} = \frac{4\pi}{\epsilon} e$$

Damit sind die Probleme im Medium auf solche im Vakuum mit reskaliertem (reduzierter) Ladungsdichte zurückgeführt.

Von besonderem Interesse sind auch Grenzflächen zwischen Dielektrika oder einem Dielektrikum und dem Vakuum. Mit dem Gaußschen Satz folgt wie bereits für Flächenladungen gezeigt, daß

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = 4\pi \sigma \quad (\vec{n} \text{ zeigt von Region 1 nach 2})$$

Da die Gleichungen nun makroskopisch sind schließt die Flächenladungsdichte σ nicht die Polarisationsladungsdichte ein. Ist $\sigma = 0$ ist die Normalkomponente von \vec{D} an der Grenzfläche somit stetig.

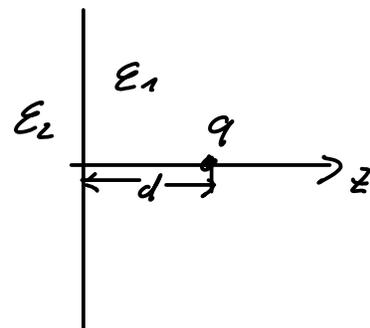
Da das makroskopische elektrische Feld im statischen Fall rotationsfrei ist, folgt wie bei der Diskussion der Flächenladungen, daß

$$\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0,$$

d.h. die Tangentialkomponente von \vec{E} ist an der Grenzfläche stetig.

4.3 Randwertprobleme mit Dielektrika

Betrachte als Beispiel eine Ladung q in einem Material mit ϵ_1 in einer Entfernung d zu einer ebenen Grenzfläche zu einem anderen Material mit ϵ_2 . Wähle die Koordinaten so, daß die Grenzfläche $z=0$ entspricht.



Zu lösen sind damit die Gleichungen

$$\epsilon_1 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi \rho \quad \text{für } z > 0$$

$$\epsilon_2 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad \text{für } z < 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad \text{überall}$$

mit der Randbedingung

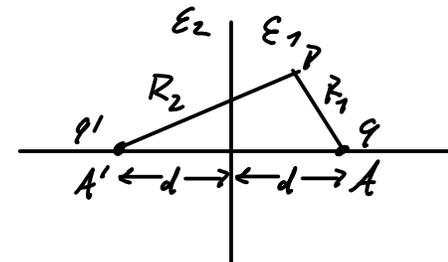
$$\lim_{z \rightarrow 0^+} \begin{pmatrix} \epsilon_1 E_z \\ E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \lim_{z \rightarrow 0^-} \begin{pmatrix} \epsilon_2 E_z \\ E_x \\ E_y \end{pmatrix}$$

Wegen $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ können wir \vec{E} wieder als Gradientenfeld, $\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi$ ansetzen

Weiterhin wählen wir

$$\phi = \frac{1}{\epsilon_1} \left(\frac{q}{R_1} + \frac{q'}{R_2} \right) \quad \text{für } z > 0$$

$$\phi = \frac{1}{\epsilon_2} \frac{q''}{R_1} \quad \text{für } z < 0 \quad \text{mit}$$



$$R_1 = \sqrt{e^2 + (d-z)^2}$$

$$R_2 = \sqrt{e^2 + (d+z)^2}$$

$$e^2 = x^2 + y^2$$

Dies sind offenbar Lösungen des Gauß'schen Gesetzes innerhalb der beiden Materialien.

Zu bestimmen sind aber noch q' und q'' mittels der Randbedingungen. Wir bilden dazu die Normalen- und Tangentialableitungen

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{R_1} \Big|_{z=0} = - \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{R_2} \Big|_{z=0} = \frac{d}{(e^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial}{\partial e} \frac{1}{R_1} \Big|_{z=0} = \frac{\partial}{\partial e} \frac{1}{R_2} \Big|_{z=0} = \frac{-e}{(e^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Stetigkeit der Normalkomponente von \vec{D}

$$\longrightarrow q - q' = q''$$

Stetigkeit der Tangentialkomponente von \vec{E}

$$\rightarrow \frac{1}{\epsilon_1} (q+q') = \frac{1}{\epsilon_2} q''$$

$$\Rightarrow q' = - \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1} q$$

$$q'' = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_2 + \epsilon_1} q$$

Wir wollen die Grenzfläche nun noch genauer betrachten

Polarisationsladungsdichte: $\rho_{\text{pol}} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\frac{\partial}{\partial z} P_z$

Integration $\rightarrow \sigma_{\text{pol}} = \vec{n} \cdot (\vec{P}_1 - \vec{P}_2)$ mit \vec{n} von 1 nach 2

$$\vec{P}_i = \frac{\epsilon_i - 1}{4\pi} \vec{E} = -\frac{\epsilon_i - 1}{4\pi} \vec{\nabla} \phi$$

\rightarrow

$$\sigma_{\text{pol}} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\epsilon_1 - 1}{4\pi} \frac{1}{\epsilon_1} \left(\frac{q}{R_1} + \frac{q'}{R_2} \right) - \frac{\epsilon_2 - 1}{4\pi} \frac{1}{\epsilon_2} \frac{q''}{R_1} \right) \Big|_{z=0}$$

$$= \frac{d}{(e^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\epsilon_1 - 1}{4\pi} \frac{1}{\epsilon_1} (q - q') - \frac{\epsilon_2 - 1}{4\pi} \frac{1}{\epsilon_2} q'' \right)$$

$$= - \frac{q}{2\pi} \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1 (\epsilon_2 + \epsilon_1)} \frac{d}{(e^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}}$$

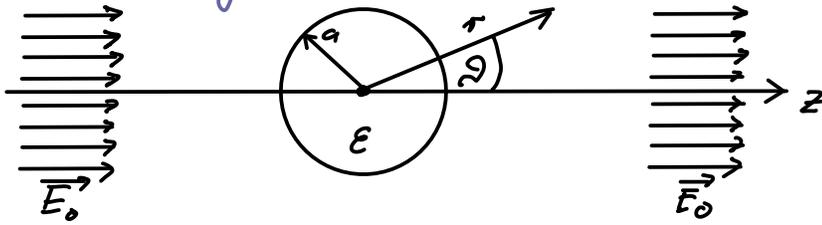
Vgl. mit Influenzladungsdichte auf leitender Platte im Vakuum aufgrund von Punktladung:

$$\sigma = - \frac{1}{2\pi} \frac{q d}{(e^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}}$$

\rightarrow Entspricht $\epsilon_1 = 1$ und $\epsilon_2 \rightarrow \infty$.

Als nächstes Beispiel betrachten wir eine homogene dielektrische Kugel (Radius a) im ladungsfreien Raum. Diese sei einem elektrischen Feld ausgesetzt, welches in großen Abständen homogen mit dem Betrag E_0 sei.

Wähle folgende Koordinaten:



Wiederum haben der Separationsansatz für die Laplacegleichung in Kugelkoordinaten und die Entwicklung in einem vollständigen Funktionensystem ihren Auftritt. Nämlich sind die Lösungen von der Form

$$\phi_{in} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \vartheta) \quad \text{für } r < a \quad (\text{keine negativen Potenzen wegen Regularität für } r=0)$$

$$\phi_{out} = \sum_{l=0}^{\infty} (B_l r^l + C_l r^{-l-1}) P_l(\cos \vartheta) \quad \text{für } r > a$$

Randbedingungen:

$$r \rightarrow \infty: \quad \phi \rightarrow -E_0 z = -E_0 r \cos \vartheta \\ \Rightarrow B_1 = -E_0, \quad B_l = 0 \quad \text{für } l \neq 1$$

$r = a$:

$$\text{Normalenstetigkeit von } \vec{D} \rightarrow -\epsilon \frac{\partial \phi_{in}}{\partial r} \Big|_{r=a} = -\frac{\partial \phi_{out}}{\partial r} \Big|_{r=a}$$

$$\text{Tangentenstetigkeit von } \vec{E} \rightarrow -\frac{1}{a} \frac{\partial \phi_{in}}{\partial \vartheta} \Big|_{r=a} = -\frac{1}{a} \frac{\partial \phi_{out}}{\partial \vartheta} \Big|_{r=a} \quad (\text{vgl. Gradient in Kugelkoordinaten})$$

Aus der tangentialen Stetigkeit folgt

$$l=1: \quad A_1 a = B_1 a + \frac{C_1}{a^2} \Rightarrow A_1 = -E_0 + \frac{C_1}{a^3}$$

$$l \neq 1: \quad A_l = \frac{C_l}{a^{2l+1}}$$

Aus der normalen

$$l=1: \quad \epsilon A_1 = B_1 - 2 \frac{C_1}{a^3} = -E_0 - \frac{2C_1}{a^3}$$

$$l \neq 1: l a^{l-1} A_l = -(l+1) \frac{C_l}{a^{l+2}}$$

Die beiden Gleichungen für $l \neq 1$ lassen sich nur mit $A_l = C_l = 0$ erfüllen.

Die Gleichungen mit $l=1$ führen zu

$$A_1 = -\frac{3E_0}{\epsilon+2}, \quad C_1 = \frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} a^3 E_0$$

→

$$\phi_{in} = -\frac{3E_0}{\epsilon+2} r \cos\vartheta = -\frac{3E_0}{\epsilon+2} z$$

$$\phi_{out} = -E_0 r \cos\vartheta + \frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} \frac{a^3}{r^2} E_0 \cos\vartheta$$

Im Inneren der Kugel ist das Feld also homogen:

$$\vec{E}_{in} = \frac{3E_0}{\epsilon+2} \hat{z} \quad \text{und beachte, dass } |\vec{E}_{in}| < |E_0|$$

Außerhalb entspricht der erste Term dem angelegten Feld und der zweite einem Dipol $\vec{p} = \frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} a^3 E_0 \hat{z}$

$$\text{(vgl. } \phi(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} q_{lm} \frac{Y_{lm}(\vartheta, \varphi)}{r^{l+1}}$$

$$q_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} |\vec{p}|, \quad Y_{10}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\vartheta$$

$$\rightarrow \frac{4\pi}{3} \frac{3}{4\pi} |\vec{p}| = \frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} a^3 E_0 \quad)$$

Wie erwartet ist dies gleich dem Volumenintegral der Polarisation:

$$\vec{p} = \frac{4\pi}{3} a^3 \vec{P} = \frac{4\pi}{3} a^3 \frac{\epsilon-1}{4\pi} \vec{E}_{in} = \frac{1}{3} a^3 \frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} 3E_0 \hat{z}$$

4.4 Magnetfelder in Materie

Ersetze $\vec{A} \rightarrow \vec{a}$ für das totale, mikroskopische Vektorpotential

→

$$\vec{a} = \frac{1}{c} \int d^3x' \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \frac{1}{c} \int d^3x' \frac{\vec{j}_{\text{mol}}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

\swarrow makroskopische Ströme \nwarrow mikroskopische Quellen, über welche wir mitteln

Mikroskopisch eignet sich eine Beschreibung durch magnetische Dipolmomente \vec{m}_{mol} , welche auf atomarer und subatomarer Ebene nicht mehr als klassische Ströme, wohl aber quantenmechanisch behandelt werden können.

→

$$\vec{a}_{\text{mol}}(\vec{x}) = \frac{\vec{m}_{\text{mol}} \times (\vec{x} - \vec{x}_j)}{|\vec{x} - \vec{x}_j|^3} \quad (\text{Von mikroskopischer Quelle } j \text{ erzeugter Beitrag})$$

Definiere die Magnetisierung $\vec{M}(\vec{x}) = n(\vec{x}) \langle \vec{m}_{\text{mol}}(\vec{x}) \rangle$

→ Makroskopisches Vektorpotential

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{c} \int d^3x' \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \int d^3x' \frac{\vec{M}(\vec{x}') \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

$$\int d^3x' \frac{\vec{M}(\vec{x}') \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = \int d^3x' \vec{M}(\vec{x}') \times \vec{\nabla}_{x'} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

$$= \int d^3x' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \vec{\nabla}_{x'} \times \vec{M}(\vec{x}') - \underbrace{\int d^3x' \vec{\nabla}_{x'} \times \frac{\vec{M}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}}$$

$$= \int d^3x' \frac{\vec{M}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Der letzte Term verschwindet sofern \vec{M} lokalisiert ist und das Integrationsvolumen entsprechend größer gewählt wird.

→

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{c} \int d^3x' \frac{\vec{j}(\vec{x}') + c \vec{\nabla}_{x'} \times \vec{M}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Entsprechend der Herleitung für die Feldgleichungen der Magnetostatik erhalten wir aus $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ für die makroskopische magnetische Flussdichte die Beziehung:

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + 4\pi \nabla \times \vec{M}$$

Wir definieren das magnetische Feld $\vec{H} = \vec{B} - 4\pi \vec{M}$

Beachten wir noch, daß \vec{B} ein reines Wirbelfeld ist, erhalten wir die makroskopischen Gleichungen

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned}$$

Für viele Stoffe (insbesondere nicht ferromagnetische) bestehen wieder lineare Zusammenhänge:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \rightarrow \vec{B} = \mu \vec{H} = (1 + 4\pi \chi_m) \vec{H}$$

mit der magnetischen Permeabilität μ und der Suszeptibilität χ_m .

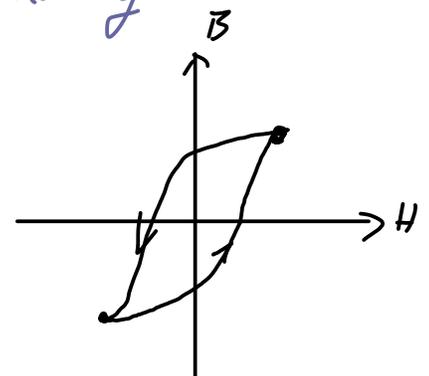
Anders als für χ_e gibt es sowohl Stoffe mit positivem als auch negativem χ_m :

$\chi_m > 0$: Paramagnetismus

$\chi_m < 0$: Diamagnetismus

Ferromagneten können auch dann magnetisiert sein, wenn $\vec{H} = 0$ ist. I.a. gilt $\vec{B} = \vec{F}(\vec{H})$, und aufgrund der Hysterese ist dies eine doppelwertige Abbildung

Man kann dazu die Permeabilität zu $\mu = \frac{\partial |\vec{B}|}{\partial |\vec{H}|}$ verallgemeinern wobei diese dann sehr viel größere Werte als für Para- bzw. Diamagneten annimmt.

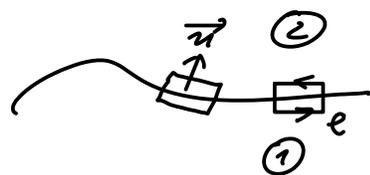


Randbedingungen an Grenzflächen

Wir gehen aus von $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ und betrachten ein Gauß'sches Kästchen

$$\rightarrow \int_{\partial V} d\vec{a} \cdot \vec{B} = (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n} = \int_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

→ Die Normal Komponente der magnetischen Flussdichte \vec{B} ist an der Grenzfläche stetig.



Als nächstes betrachten wir die Rechteckschleife \mathcal{C} und benutzen den Stokes'schen Satz ($A_{\mathcal{C}}$ das von \mathcal{C} umschlossene Rechteck, \vec{c} der Normalenvektor - zeigt aus der Skizze heraus, Länge von \mathcal{C} ist l):

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} d\vec{l} \cdot \vec{H} &= (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \cdot \vec{c} \times \vec{n} \\ &= \int_{A_{\mathcal{C}}} d\vec{a} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \int_{A_{\mathcal{C}}} d\vec{a} \cdot \vec{j} = \frac{4\pi}{c} \vec{c} \cdot \vec{K} \end{aligned}$$

mit der Flächenstromdichte \vec{K} .

$$\rightarrow \vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \frac{4\pi}{c} \vec{K}$$

In Abwesenheit von Grenzflächenströmen ist also die Tangentialkomponente des magnetischen Feldes \vec{H} stetig.

Gilt außerdem der lineare Zusammenhang zwischen \vec{B} und \vec{H} mittels der Permeabilität, werden diese Bedingungen zu

$$\vec{H}_2 \cdot \vec{n} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \vec{H}_1 \cdot \vec{n} \quad \text{und} \quad \vec{H}_2 \times \vec{n} = \vec{H}_1 \times \vec{n}$$

Als Beispiel betrachten wir eine magnetisierbare Kugel im asymptotisch homogenen Feld \vec{B}_0 , analog zum Beispiel für ein Dielektrikum im elektrischen Feld.

$\vec{j} = 0$ überall $\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{H} = 0$ und $\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0$ überall
 Dabei muß die Grenzfläche gesondert behandelt werden.

Im Innen- und Außenbereich können wir damit \vec{B} (da rotationsfrei) durch ein magnetisches Potential ausdrücken:

$$\vec{H} = -\vec{\nabla} \phi_{in, out}^{(m)}$$

$r = a$:

Normalenstetigkeit von \vec{B} $\rightarrow -\mu \left. \frac{\partial \phi_{in}^{(m)}}{\partial r} \right|_{r=a} = - \left. \frac{\partial \phi_{out}^{(m)}}{\partial r} \right|_{r=a}$

Tangentenstetigkeit von \vec{H} $\rightarrow -\frac{1}{a} \left. \frac{\partial \phi_{in}^{(m)}}{\partial \vartheta} \right|_{r=a} = -\frac{1}{a} \left. \frac{\partial \phi_{out}^{(m)}}{\partial \vartheta} \right|_{r=a}$

Mit Hilfe des vorherigen Resultats erhalten wir unmittelbar:

$$\phi_{in}^{(m)} = -\frac{1}{\mu} \frac{3B_0}{\mu+2} r \cos \vartheta = -\frac{1}{\mu} \frac{3B_0}{\mu+2} z$$

$$\phi_{out}^{(m)} = -\frac{B_0}{\mu} r \cos \vartheta + \frac{\mu-1}{\mu+2} \frac{a^3}{r^2} \frac{B_0}{\mu} \cos \vartheta$$

$$\rightarrow \vec{B}_{in} = \frac{3B_0}{\mu+2} \hat{z}$$

$$\vec{B}_{out} = B_0 \hat{z} - \frac{\mu-1}{\mu+2} \frac{B_0}{\mu} a^3 \vec{\nabla} \frac{1}{r^2} \cos \vartheta$$

$$= B_0 \hat{z} - B_0 \frac{\mu-1}{\mu+2} \frac{a^3}{r^2} \left(-\frac{2z}{r} \sin \vartheta - 2 \frac{z}{r} \cos \vartheta \right)$$

$$\vec{V} \frac{1}{r^2} \cos \vartheta = \vec{V} \frac{\hat{z} \cdot \vec{x}}{r^3} = \frac{\hat{z}}{r^3} - 3 \frac{\hat{z} \cdot \vec{x}}{r^5} = - \frac{3 \vec{x} (\hat{z} \cdot \vec{x}) - \vec{x}^2 \hat{z}}{|\vec{x}|^5}$$

$$\Rightarrow \vec{B}_{\text{out}} = B_0 \hat{z} + \frac{3 \vec{x} (\vec{x} \cdot \vec{\mu}) - \vec{\mu} \cdot \vec{x}^2}{|\vec{x}|^5}$$

Dabei identifizieren wir das induzierte magnetische Dipolmoment der Kugel als

$$\vec{\mu} = \frac{\mu - 1}{\mu + 2} a^3 B_0 \hat{z}$$