3 Magnetostatik

3.1 Stromdichte

Die im den Maxwellgleichungen ersichtliche Symmetrie zwischen elektrischen und magnetischen Feldern wird maximal durch die Tatsache, daß es keine freien magnetischen Ladungen gibt, verletzt. Im zeitunabhängigen Fall sind damit Ströme Quellen des Magnetfeldes, welche als infinitesimale Stromschleifen einen magnetischen Dipol bilden.

Ladungsdichte ρ und Stromdichte $\vec{j}$ genügen dem Gesetz der Ladungserhaltung: Die zeitliche Änderung der Ladung in einem Volumen V entspricht dem Stromfluß durch die Oberfläche ∂V, in anderen Worten:

$$\frac{d}{dt}\int_V d^3x\, \rho(\vec{x}) = -\oint_{\partial V} d\vec{a}\cdot\vec{j}(\vec{x})$$

V beliebig $\longrightarrow$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$$ <u>Kontinuitätsgleichung</u>

Im zeitunabhängigen Fall der Magnetostatik führt dies zu

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$$

Mikroskopisch gehen wir von Punktladungen q_i an an den Orten $\vec{x}_i$ mit Geschwindigkeiten $\vec{v}_i = \dot{\vec{x}}_i$ aus. Die auf der Dirac δ-Funktion fußende Methode in der Elektrostatik überträgt sich dann folgendermaßen:

$$\rho(\vec{x},t) = \sum_i q_i\, \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_i(t)), \qquad \vec{j}(\vec{x},t) = \sum_i q_i\, \vec{v}_i\, \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_i(t))$$

Der Strom I ist als Ladung durch Zeit definiert.
Wird eine Fläche $\Delta\vec{A}$ von der Stromdichte $\vec{j}$ durchflossen, dann ist $I = \vec{j}\cdot\Delta\vec{A}$.
Einen leitenden Draht kann man aus Vektorelementen $d\vec{\ell}$ zusammengesetzt beschreiben, wobei $d\vec{\ell} \parallel \vec{j}$.
In einem Volumen d^3x, welches $d\vec{\ell}$ genau einschließt, gilt in Abwesenheit weiterer Stromdichten
$\vec{j}(\vec{x})\,d^3x = I\,d\vec{\ell}$.

3.2 Kraftgesetze

Kraft auf Strom

Elektrostatik: $\vec{F} = q\vec{E}$ definiert $\vec{E}$

Magnetostatik:
Betrachte Längenelement $d\vec{\ell}$ eines Drahtes, welcher vom Strom I durchflossen wird.
Im Magnetfeld beobachtet man, daß der Beitrag zur Kraft auf den Leiter sich folgendermaßen verhält:
$d\vec{F} \propto I$, $\; d\vec{F} \propto d\vec{\ell}$, $\; d\vec{F} \perp d\vec{\ell}$
$\longrightarrow$ Kann durch Vektorfeld $\vec{B}(\vec{x})$ mit folgendem Kraftgesetz beschrieben werden:

$$d\vec{F}(\vec{x}) = \frac{I}{c}\, d\vec{\ell} \times \vec{B}(\vec{x})$$

Das Feld $\vec{B}(\vec{x})$ wird <u>magnetische Flußdichte</u> oder <u>magnetische Induktion</u> genannt.
Die Lichtgeschwindigkeit $c = 2{,}998\ldots * 10^8 \frac{m}{s}$ erscheint hier als zunächst willkürliche Konstante. (Diese Definition

führt aber zu gleichen Amplituden von $\vec{E}$ & $\vec{B}$-Feld in der elektromagnetischen Welle, ein wesentlicher Vorzug des Gaußschen Einheitensystems.)

Kraft auf Stromdichte

Kraftdichte:

$$\vec{f}(\vec{x}) = \frac{d\vec{F}}{dV} = \frac{1}{c}\frac{I\,d\vec{\ell}}{dV} \times \vec{B} = \frac{1}{c}\vec{j} \times \vec{B}$$

Kraft auf Punktladung

$$\vec{f}(\vec{x}') = \frac{1}{c} q\vec{v} \times \vec{B}(\vec{x}')\,\delta^3(\vec{x}' - \vec{x}(t))$$

Das Kraftfeld ist dann ebenfalls nur im Aufenthaltsort der Ladung präsent $\longrightarrow$ Kraftvektor $\vec{F}$ mit $\vec{f}(\vec{x}') = \vec{F}\delta^3(\vec{x}' - \vec{x}(t))$

Fügen wir noch ein elektrostatisches Feld $\vec{E}$ hinzu, dann erhalten wir die

$\longrightarrow$ Lorentz-Kraft

$$\vec{F} = qE + \frac{1}{c} q\vec{v} \times \vec{B}$$

Von einem Strom erzeugtes Feld

Betrachte nun die Wechselwirkung von zwei stromdurchflossenen Leitern. Mit obiger Definition des $\vec{B}$-Feldes beobachtet man folgende Gesetzmäßigkeiten für ein vom Leiterelement mit I, $d\vec{\ell}$ am Ort $\vec{x}'$ erzeugte Feld $\vec{B}(\vec{x})$ $(B \equiv |\vec{B}|)$:

$$dB \propto I\,d\ell, \qquad d\vec{B} \perp d\vec{\ell}, \qquad d\vec{B} \perp (\vec{x} - \vec{x}')$$

$$dB \propto \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|^2}, \qquad dB \propto \sin(\sphericalangle(d\vec{\ell}, \vec{x} - \vec{x}'))$$

Mit obiger Definition der Flußdichte wird die Proportionalitätskonstante in der gesuchten Gesetzmäßigkeit durch Messung festgelegt. Insgesamt kann das Verhalten durch folgende Gleichung beschrieben werden:

$$d\vec{B}(\vec{x}) = \frac{I}{c}\, d\vec{\ell} \times \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

Ersetze $I\, d\vec{\ell}$ durch die Stromdichte $\vec{j}$ und bilde Volumenintegral $\longrightarrow$

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{1}{c} \int d^3x'\, \vec{j}(\vec{x}') \times \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

Feld eines unendlich langen, geraden Drahtes

Zylinderkoordinaten:

$$x_1 = r\cos\varphi$$

$$x_2 = r\sin\varphi$$

$$x_3 = z$$

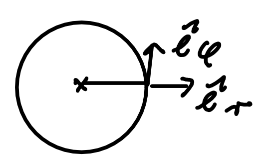
Draht in z-Richtung:

$$\vec{j}(\vec{x}) = I\,\delta(x_1)\,\delta(x_2)\,\hat{x}_3 = I\,\frac{\delta(r)}{2\pi r}\,\hat{z}$$

Normierung der δ-Funktion:

$$I = \int dx_1\, dx_2\, \hat{x}_3 \cdot \vec{j}(\vec{x}) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int r\, dr\, \frac{\delta(r)}{2\pi r}$$

Wähle o.B.d.A. $z = 0$, $\varphi = 0$, $\vec{B}(\vec{x}) \equiv \vec{B}(r)$



$\longrightarrow$

$$\vec{B}(r) = \frac{I}{c} \int_{-\infty}^{\infty} dz' \int_0^{\infty} r'\, dr' \int_0^{2\pi} d\varphi'\, \frac{\delta(r')}{2\pi r'}\, \frac{1}{(r^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}\, \hat{z} \times (r\,\hat{e}_r - z'\,\hat{z})$$

$$= \frac{I}{c}\, r\,\hat{e}_\varphi \int_{-\infty}^{\infty} dz'\, \frac{1}{(r^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{I}{c}\, r\,\hat{e}_\varphi \left[\frac{z'}{r^2\sqrt{r^2 + z'^2}} \right]_{-\infty}^{\infty}$$

$$= \frac{2I}{c}\, \frac{\hat{e}_\varphi}{r}$$

Biot-Savart-Gesetz

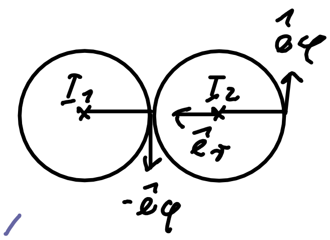
Kraft zwischen parallelen Drähten

Betrachte Kraft auf $d\vec{l}_1$ im Feld $\vec{B}_2 = \frac{2I_2}{c}\frac{\hat{e}_\varphi}{r}$,

Abstand r entlang x_1-Achse:

$$d\vec{F}_1(\vec{x}) = \frac{I_1}{c} d\vec{l}_1 \times \vec{B}_2(\vec{x}) = \frac{2 I_1 I_2}{r c^2} dl_1 \, \hat{z} \times \hat{e}_\varphi$$

$$= \frac{2 I_1 I_2}{r c^2} dl_1 \, \hat{e}_r$$



$\longrightarrow$ Die Kraft ist attraktiv für gleichsinnigen, repulsiv für gegensinnigen Strom.

3.3 Feldgleichungen der Magnetostatik

Vektorpotential

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{1}{c}\int d^3x' \, \vec{j}(\vec{x}') \times \frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3} = -\frac{1}{c}\int d^3x' \, \vec{j}(\vec{x}') \times \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

$$= \frac{1}{c} \vec{\nabla} \times \int d^3x' \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x})$$

Dabei ist die allgemeine Form des Vektorpotentials

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{c}\int d^3x' \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} + \vec{\nabla}\Lambda(\vec{x})$$

mit einem beliebigen Skalarfeld $\Lambda(\vec{x})$. Die Wahl $\Lambda(\vec{x}) \equiv 0$ heißt <u>Coulomb-Eichung</u>. Es gilt dann

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{c} \vec{\nabla} \cdot \int d^3x' \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = -\frac{1}{c}\int d^3x' \, \vec{j}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla}_{x'} \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

$$= \frac{1}{c}\int d^3x' \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \underbrace{\vec{\nabla}_{x'} \cdot \vec{j}(\vec{x}')}_{\frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0} = 0$$

Umgekehrt bezeichnen wir

$$\vec{A}(\vec{x}) \longrightarrow \vec{A}(\vec{x}) + \vec{\nabla}\Lambda(\vec{x})$$

als <u>Eichtransformation</u>. Eine solche läßt das physikalische

Feld $\vec{B}$ invariant.

Wir berechnen als nächstes

$$[\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{A}]_i = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\nabla_j\nabla_l A_m = (\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})\nabla_j\nabla_l A_m$$
$$= [\vec{\nabla}\;\vec{\nabla}\cdot\vec{A} - \vec{\nabla}^2\vec{A}]_i$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}(\vec{x}) = \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{x}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Coulomb-Eichung}}}{=} -\Delta\vec{A} = -\frac{1}{c}\int d^3x'\,\Delta\,\frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \frac{4\pi}{c}\int d^3x'\,\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')\,\vec{j}(\vec{x}')$$
$$= \frac{4\pi}{c}\,\vec{j}(\vec{x})$$

Die gewonnene Identität beinhaltet nur die physikalischen Größen $\vec{B}$ und $\vec{j}$, ist also, obwohl wir in der Herleitung die Coulomb-Eichung benutzt haben, eichinvariant. Man kann sich natürlich auch leicht vergewissern, daß auch mit $\Lambda(\vec{x})\neq 0$ das gleiche Resultat folgt.

Weiterhin ist $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{A} \equiv 0$.

Insgesamt erhalten wir die

<u>Feldgleichungen der Magnetostatik</u>
$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}(\vec{x}) = 0$
$\vec{\nabla}\times\vec{B}(\vec{x}) = \frac{4\pi}{c}\,\vec{j}(\vec{x})$

Die zweite Gleichung wird in der Elektrodynamik noch einen Zusatzterm erhalten.

Benutzen wir $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = -\Delta\vec{A}$ (in Coulomb-Eichung) und $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{A} \equiv 0$ erhalten wir die alternative Form:

$$\Delta\vec{A}(\vec{x}) = -\frac{4\pi}{c}\,\vec{j}(\vec{x})$$
$$\vec{B}(\vec{x}) = \vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{x})$$

Die Gleichung $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ impliziert, daß es keine

magnetischen Ladungen (Monopole) gibt.
Die Integralform der zweiten Feldgleichung ist das

Ampèresche Gesetz:

$$\oint_{\partial A} d\vec{r}\cdot\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\int_A d\vec{a}\cdot\vec{j} = \frac{4\pi}{c} I_A$$

mit dem Strom I_A durch die Fläche A.

3.4 Magnetischer Fluß

Der magnetischen Flußdichte $\vec{B}$ zugehörig definieren wir den Fluß Φ durch eine Fläche A:

$$\Phi = \int_A d\vec{a}\cdot\vec{B} = \int_A d\vec{a}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{A} = \oint_{\partial A} d\vec{r}\cdot\vec{A}$$

Der Fluß hängt also nur vom Rand der Fläche ab, und verschwindet dieser für eine geschlossene Fläche, so ist auch der Fluß gleich Null. Dies kann natürlich auch als Konsequenz der Quellenfreiheit der Flußdichte gesehen werden:

$$\oint_{\partial V} d\vec{a}\cdot B = \int_V d^3x\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

Beispiel Homogen durchflossener, zylindrischer Draht
Draht entlang der z-Achse,

$$\vec{j}(\vec{x}) = \hat{e}_z \begin{cases} \frac{I}{\pi R^2} & \text{für } r \le R \\ 0 & \text{für } r > R \end{cases}$$

In der Coulomb-Eichung ist $\vec{A} \parallel \vec{j}$ (vgl. Zshg. beider Größen in der Integraldarstellung). Mit der

Zylindersymmetrie folgt

$$\vec{A}(\vec{x}) \equiv A(r)\,\hat{e}_z \quad \& \quad \vec{B}(\vec{x}) = \vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{x}) \equiv B(r)\,\hat{e}_\varphi$$

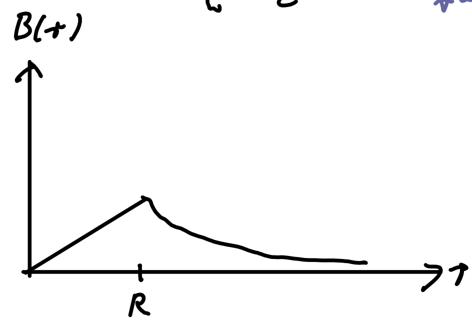
Wähle nun im Ampèreschen Gesetz A als eine Kreisfläche vom Radius ϱ senkrecht zum Draht

$\longrightarrow$

$$\oint_{\partial B} d\vec{r}\cdot\vec{B} = 2\pi\varrho\, B(\varrho) = \frac{4\pi}{c}\,\frac{I}{\pi R^2}\,2\pi\int_0^{\min(\varrho,R)} \varrho'\,d\varrho' = \begin{cases} \frac{4\pi}{c}\, I\, \frac{\varrho^2}{R^2} & \text{für } \varrho \le R \\ \frac{4\pi}{c}\, I & \text{für } \varrho > R \end{cases}$$

$\longrightarrow$

$$B(r) = \frac{2I}{c}\,\hat{e}_\varphi \begin{cases} \frac{r}{R^2} & \text{für } r \le R \\ \frac{1}{r} & \text{für } r > R \end{cases}$$



<u>Beispiel</u> Unendlich lange Spule

In Form eines Zylinders, symmetrisch um die z-Achse, Radius R, N_S Windungen auf der Länge l_S.

$\longrightarrow$

$$\vec{j}(\vec{x}) = j(r)\,\hat{e}_\varphi = \frac{N_S I}{l_S}\,\delta(r-R)\,\hat{e}_\varphi$$

Mit $\vec{j} \perp \hat{e}_z \longrightarrow \vec{A} \perp \hat{e}_z \rightarrow \vec{A}(\vec{x}) \equiv A_r(r)\,\hat{e}_r + A_\varphi(r)\,\hat{e}_\varphi$

Divergenz in Zylinderkoordinaten: $\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r V_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$

Rotation: $\vec{\nabla}\times\vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\hat{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\hat{e}_\varphi + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r} r A_\varphi - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi}\right)\hat{e}_z$

$$\longrightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\, r A_r(r) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Coulomb-Eichung}}}{=} 0 \Longrightarrow A_r(r) = \frac{k}{r} \quad \text{mit einer Konstanten } k$$

Für $A_r(0)$ endlich (vgl. Integralform) folgt $k = 0$.

$$\longrightarrow \vec{A}(\vec{x}) \equiv A_\varphi(r)\,\hat{e}_\varphi$$

$$\longrightarrow \vec{B}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r A_\varphi \hat{e}_z = B(r)\,\hat{e}_z$$

$$\longrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = -\frac{\partial B}{\partial r}\hat{e}_\varphi = -\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r A_\varphi \hat{e}_\varphi$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \longrightarrow -\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r A_\varphi(r) = \frac{4\pi}{c}\frac{N_s I}{\ell_s}\delta(r-R)$$

$$\longrightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r A_\varphi = -\frac{4\pi}{c}\frac{N_s I}{\ell_s}\left(\Theta(r-R) + C_1\right)$$

$$\longrightarrow r A_\varphi = -\frac{4\pi}{c}\frac{N_s I}{\ell_s}\left(\frac{(r^2-R^2)\Theta(r-R)}{2} + C_1\frac{r^2}{2} + C_2\right)$$

Aus der Integraldarstellung von $\vec{A}$ folgt $\vec{A}(0) = \vec{A}(\infty) = 0$

$$\longrightarrow C_2 = 0, \quad C_1 = -1$$

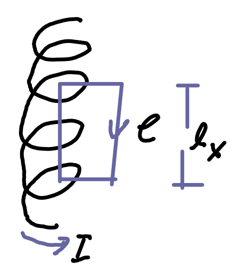
Insgesamt:

$$\vec{A}(\vec{x}) = A_\varphi(r)\hat{e}_\varphi = \frac{4\pi}{c}\frac{N_s I}{\ell_s}\begin{cases}\frac{r}{2} & \text{für } r \leq R\\ \frac{R^2}{2r} & \text{für } r > R\end{cases}$$

$$\vec{B}(\vec{x}) = \hat{e}_z\frac{4\pi}{c}\frac{N_s I}{\ell_s}\begin{cases}1 & \text{für } r \leq R\\ 0 & \text{für } r > R\end{cases}$$

Für eine endlich lange Spule verschwindet das Feld im Außenbereich nicht. Man kann aber im Inneren immer noch ein sehr homogenes und im Vergleich zum Außenbereich starkes Feld erzeugen.

Setzen wir Homogenität im Innenbereich voraus sowie das Verschwinden des Feldes im Äußeren, und integrieren entlang der skizzierten Kontur $\mathcal{C}$, dann erhalten wir



N_x Windungen in ℓ_x

$$\oint_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{B} = \ell_x B_0 = \frac{4\pi}{c} N_x I$$

Mit $\frac{N_x}{\ell_x} = \frac{N_s}{\ell_s}$ ist dies in Übereinstimmung mit obigem Resultat. Man kann sich die Form des Magnetfeldes auch mit geometrischen Argumenten (Wegunabhängigkeit des obigen Integrals, solange der Strom eingeschlossen wird) klarmachen. Letztlich entspricht eine solche Argumentation den Heraushebungen der Feldkomponenten in bestimmten Richtungen und Regionen, welche obige Rechnung explizit zeigt.

3.5 Magnetischer Dipol

Da es keine magnetischen Ladungen gibt, kommt dem Dipol (z.B. in Form von Elementarteilchen oder im Stabmagneten) eine besondere Bedeutung zu.

Betrachte lokalisierte Stromverteilung mit $\vec{j}(\vec{x})=0$ für $x \equiv |\vec{x}| > R_0$.

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \underset{x' \ll x}{=} \frac{1}{x} + \frac{\vec{x}\cdot\vec{x}'}{x^3} + \dots$$

$\longrightarrow$

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{c}\int d^3x' \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \frac{1}{cx}\int d^3x'\, \vec{j}(\vec{x}') + \frac{1}{cx^3}\int d^3x' \,(\vec{x}\cdot\vec{x}')\, \vec{j}(\vec{x}') + \dots$$

Wegen $\vec{\nabla}\cdot\vec{j}=0$ gilt $(V=\{\vec{x} \mid x \le R_0\})$

$$\vec{\nabla}(x_i \vec{j}(\vec{x})) = \hat{e}_i \cdot \vec{j}(\vec{x}) + x_i\, \vec{\nabla}\cdot \vec{j}(\vec{x}) = j_i(\vec{x})$$

$\vec{j}$ verschwindet auf Rand

$$\int_V d^3x'\, j_i(\vec{x}') = \int_V d^3x'\, \vec{\nabla}_{x'} \cdot (x_i' \vec{j}(\vec{x}')) = \oint_{\partial V} d\vec{a}' \cdot \vec{j}(\vec{x}')\, x_i' = 0$$

$\longrightarrow$ Der Monopolterm verschwindet

$$\vec{\nabla}\cdot(x_i x_k \vec{j}) = \hat{e}_i \cdot \vec{j}\, x_k + \hat{e}_k \cdot \vec{j}\, x_i + x_i x_k\, \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = x_k j_i + x_i j_k$$

$$\longrightarrow \int_V d^3x' \left(x_k' j_i(\vec{x}') + x_i' j_k(\vec{x}')\right) = \oint_{\partial V} d\vec{a}' \cdot \left(x_i' x_k' \vec{j}(\vec{x}')\right) = 0$$

$$\longrightarrow \int_V d^3x' \, \vec{x}\cdot\vec{x}' \, \vec{j}(\vec{x}') = -\int_V d^3x' \, \vec{x}\cdot\vec{j}(\vec{x}') \, \vec{x}'$$

$$\longrightarrow$$

$$A_i(\vec{x}) = \frac{1}{cx^3} \int d^3x' \, (\vec{x}\cdot\vec{x}') \, j_i(\vec{x}')$$

$$= \frac{1}{cx^3} \int d^3x' \, \frac{1}{2} \left(\vec{x}\cdot\vec{x}' \, j_i(\vec{x}') - \vec{x}\cdot\vec{j}(\vec{x}') \, x_i' \right)$$

$$= \frac{1}{2cx^3} \, x_k \int d^3x' \left(x_k' j_i(\vec{x}') - x_i' j_k(\vec{x}') \right)$$

vgl.

$$[(\vec{x}' \times \vec{j}) \times \vec{x}]_i = \varepsilon_{ijk} (\vec{x}' \times \vec{j})_j \, x_k = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jlm} x_l' j_m x_k$$

$$= (\delta_{kl}\delta_{im} - \delta_{km}\delta_{il}) x_l' j_m x_k = x_k (x_k' j_i - x_i' j_k)$$

$$\longrightarrow$$

$$\vec{A}(\vec{x}) = -\frac{1}{2cx^3} \vec{x} \times \int d^3x' \, \vec{x}' \times \vec{j}(\vec{x}')$$

Wir definieren:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Magnetisches Dipolmoment der} \\ \text{Stromverteilung} \\ \vec{\mu} = \dfrac{1}{2c} \displaystyle\int d^3x \; \vec{x} \times \vec{j}(\vec{x})\end{array}}$$

$$\longrightarrow$$

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\vec{\mu} \times \vec{x}}{x^3} + \dots$$

Die Terme höherer Ordnung sind jeweils um einen Faktor $\frac{R_0}{x}$ unterdrückt.

$$[\vec{\nabla} \times \vec{A}]_i = \varepsilon_{ijk} \nabla_j A_k = \varepsilon_{ijk} \nabla_j \varepsilon_{klm} \mu_l x_m \frac{1}{x^3}$$

$$= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\left(\delta_{jm}\frac{\mu_l}{x^3} - 3\frac{\mu_l x_m x_j}{x^5}\right)$$

$$= 3\frac{\mu_i}{x^3} - \delta_{ij}\delta_{jl}\frac{\mu_l}{x^3} - 3\frac{\mu_i x_j x_j}{x^5} + 3\frac{\mu_j x_j x_i}{x^5}$$

$$= -\frac{\mu_i}{x^3} + 3\frac{\vec{x}\cdot\vec{\mu}}{x^5}x_i$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{3\vec{x}(\vec{x}\cdot\vec{\mu}) - \vec{\mu}\,\vec{x}^2}{|\vec{x}|^5}$$

Dieser Zusammenhang zwischen Dipolmoment und Feld entspricht dem elektrostatischen Fall.

Beispiele

Punktdipol

$$\vec{j}(\vec{x}) = -\frac{c}{4\pi}\Delta\vec{A}(\vec{x}) = -\frac{c}{4\pi}\Delta\frac{\vec{\mu}\times\vec{x}}{x^3} = \frac{c}{4\pi}\Delta(\vec{\mu}\times\vec{\nabla})\frac{1}{x}$$

$$= -c(\vec{\mu}\times\vec{\nabla})\,\delta^3(\vec{x})$$

Drahtschleife

Strom I, Radius R, in xy-Ebene:

$$\longrightarrow \vec{j} = I\,\delta(r-R)\,\delta(z)\,\hat{e}_\varphi$$

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2c}\int d^3x\ \vec{x}\times\vec{j}(\vec{x})$$

$$= \frac{1}{2c}\int_0^\infty r\,dr\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-\infty}^{\infty}dz\,(r\,\hat{e}_r + z\,\hat{e}_z)\times\hat{e}_\varphi\, I\,\delta(r-R)\,\delta(z)$$

$$= \frac{I}{2c}\,2\pi R^2\,\hat{e}_z = \frac{\pi R^2 I}{c}\,\hat{e}_z$$

Gyromagnetisches Verhältnis

Eine Ladungsdichte $\varrho(\vec{x})$ rotiere mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$

$\longrightarrow \vec{v}(\vec{x}) = \vec{\omega} \times \vec{x}$, $\vec{j} = \varrho \vec{v} \longrightarrow$

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2c} \int d^3x \; \vec{x} \times \vec{v}(\vec{x}) \, \varrho(\vec{x})$$

Es werde eine Massendichte $\varrho_m(\vec{x})$ mitgeführt

$\longrightarrow$ Drehimpuls

$$\vec{L} = \int d^3x \; \vec{x} \times \vec{v}(\vec{x}) \, \varrho_m(\vec{x})$$

Gilt $\frac{\varrho(\vec{x})}{q} = \frac{\varrho_m(\vec{x})}{m}$ (z.B. für Punktladung) mit

$q = \int d^3x \, \varrho(\vec{x})$ und $m = \int d^3x \, \varrho_m(\vec{x})$

$$\longrightarrow \vec{\mu} = \frac{q}{2mc} \vec{L}$$

Abweichungen von dieser Beziehung werden mit dem g-Faktor parametrisiert:

$$\vec{\mu} = g \frac{q}{2mc} \vec{L}$$

In der Quantenmechanik folgt der Bahndrehimpuls diesem Verhältnis mit $g = 1$.
Allerdings führt Diracs relativistische Beschreibung des Elektrons zu $g \simeq 2$. In der Quantenelektrodynamik lassen sich Korrekturen dazu berechnen:

$$g = 2 + \frac{\alpha}{\pi} + \ldots$$

Die Korrekturen sind heute bis zur Ordnung α^5

$e \approx 4{,}80 * 10^{-10}$ statC

$\hbar \approx 1{,}05 * 10^{-27}$ erg s

$c \approx 3{,}00 * 10^{10} \frac{cm}{s}$

$\longrightarrow \alpha \approx \frac{1}{137}$

bekannt. Die experimentelle Genauigkeit ist ein klein wenig besser, und Theorie und Experiment stimmen zu einer relativen Präzision von 10^{-9} überein.

3.6 Kräfte auf idealisierte Stromverteilungen

Betrachte wieder Stromdichte $\vec{j}(\vec{x})$ mit $\vec{j}(\vec{x}) = 0$ für $x \equiv |\vec{x}| > R_0$, im Magnetfeld $\vec{B}(\vec{x})$.

Taylorentwicklung in der Nähe der Verteilung:

$$\vec{B}(\vec{x}) = \vec{B}(\vec{0}) + \vec{x} \cdot \vec{\nabla}_{x'} \vec{B}(\vec{x}')\Big]_{\vec{x}'=0} + \dots$$

Kraftdichte:

$$\vec{f}(\vec{x}) = \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B}$$

$\longrightarrow$ Gesamtkraft

$$\vec{F} = \frac{1}{c} \int d^3x \, \vec{j}(\vec{x}) \times \vec{B}(\vec{x})$$

$$= \frac{1}{c} \int d^3x \, (\vec{x} \cdot \vec{\nabla}_{x'}) \, \vec{j}(\vec{x}) \times \vec{B}(\vec{x}')\Big|_{\vec{x}'=0} + \dots$$

Dabei ist $\int d^3x \, \vec{j}(\vec{x}) \times \vec{B}(0) = 0$ wegen $\int d^3x' \, j_i(\vec{x}') = 0$

Im Komponenten:

$$F_i = \frac{1}{c}\int d^3x\ \varepsilon_{ijk}\ x_l \nabla_{x'l}\ j_j(\vec{x})\ B_k(\vec{x}')\Big|_{\vec{x}'=0} + \dots$$

$$\mu_t = \frac{1}{2c}\ \varepsilon_{trs}\int d^3x\ x_r j_s$$

$$\longrightarrow \varepsilon_{ljt}\mu_t = \frac{1}{2c}\left(\delta_{rl}\delta_{sj} - \delta_{rj}\delta_{sl}\right)\int d^3x\ x_r j_s$$

$$= \frac{1}{2c}\int d^3x\ (x_l j_j - x_j j_l) = \frac{1}{c}\int d^3x\ x_l j_j$$

$$\int d^3x\ x_k j_i = -\int d^3x\ x_i j_k$$

$\longrightarrow$

$$F_i = \varepsilon_{ljt}\mu_t\ \varepsilon_{ijk}\ \nabla_l\ B_k = (\delta_{tk}\delta_{li} - \delta_{ti}\delta_{lk})\ \mu_t \nabla_l B_k + \dots$$

$$= \nabla_i\ \vec{\mu}\cdot\vec{B} - \mu_i\ \underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{B}}_{=0} + \dots$$

$$\longrightarrow \vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{\mu}\cdot\vec{B}) + \dots =: -\vec{\nabla}W$$

mit dem Potential W

<u>Drehmoment</u>

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\,(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

$$\vec{M} = \int d^3x\ \vec{x}\times\vec{f}(\vec{x}) = \frac{1}{c}\int d^3x\ \vec{x}\times(\vec{j}\times\vec{B}(0)) + \dots$$

$$= \frac{1}{c}\int d^3x\left(\vec{j}\,(\vec{x}\cdot\vec{B}(0)) - \vec{B}(0)(\vec{x}\cdot\vec{j})\right) + \dots$$

$\longrightarrow$

$$M_i = \frac{1}{c}\int d^3x\ (j_i\ x_j\ B_j(0) - B_i(0)\ x_j j_j) + \dots$$

$$= -\varepsilon_{ijk}\ \mu_k\ B_j(0) - \underbrace{\varepsilon_{jjk}}_{=0}\mu_k\ B_i(0) + \dots$$

$$\longrightarrow \vec{M} = \vec{\mu}\times\vec{B} + \dots$$

Konsistenz mit Potential:

$$W = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -|\vec{\mu}||\vec{B}| \cos\vartheta$$

$$|\vec{M}| = \left| -\frac{\partial W}{\partial \vartheta} \right| = |\vec{\mu}||\vec{B}| \, |\sin\vartheta|$$

Beispiel Wechselwirkungspotential zweier magnetischer Dipole

Feld von Dipol 2 (Ort $\vec{x}_2$) am Ort $\vec{x}_1$ von Dipol 1

$$\vec{B}_2 = \frac{3(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \cdot \vec{\mu}_2 - \vec{\mu}_2 (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)^2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^5}$$

$$W_{12} = -\vec{\mu}_1 \cdot \vec{B}_2 = -\frac{3(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \cdot \vec{\mu}_1 \, (\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \cdot \vec{\mu}_2 - \vec{\mu}_1 \cdot \vec{\mu}_2 (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)^2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^5} = W_{21}$$

$\rightarrow$ analog zum elektrischen Fall