

## 2. Elektrostatik

### 2.1 Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik

Wir betrachten ruhende Ladungen und nehmen an, Magnetfelder und Ströme sind abwesend. Die Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik ergeben sich aus der Messung der Coulomb-Kraft  $\vec{F}_{12}$  zwischen zwei punktförmigen Ladungen  $q_1$  und  $q_2$ .

Die Coulomb-Kraft

- \* ist direkt proportional zu  $q_1$  und  $q_2$ ,
- \* ist umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstandes der beiden Ladungen,
- \* wirkt entlang der Verbindungslinie der Ladungen,
- \* ist abstoßend für gleichnamige, anziehend für ungleichnamige Ladungen,
- \* erfüllt "actio gleich reactio".

In anderen Worten, es gilt das

### Coulomb-Gesetz

$$\underbrace{\vec{F}_{12}}_{\text{Kraft auf } q_1} = k q_1 q_2 \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3} = - \underbrace{\vec{F}_{21}}_{\text{Kraft auf } q_2}$$

Dabei sind  $\vec{x}_{1,2}$  die Positionen von  $q_{1,2}$ ,  $k$  ist eine positive Konstante.

Wir definieren nun das elektrische Feld  $\vec{E}(\vec{x})$  durch die Kraft  $F(\vec{x})$ , welche eine punktförmige Testladung  $q$  am Ort  $\vec{x}$  erfährt:

$$\vec{F}(\vec{x}) = q \vec{E}(\vec{x})$$

Das von  $q_1$  erzeugte Feld ist also

$$\vec{E}(\vec{x}) = k q_1 \frac{\vec{x} - \vec{x}_1}{|\vec{x} - \vec{x}_1|^3}$$

Wir wählen nun  $k=1$ , so daß die Einheit der Ladung durch die Ladungsmenge definiert werden kann, welche eine Einheit der Kraft auf eine gleiche Ladung im Abstand von einer Längeneinheit ausübt. Es ist üblich, als Basiseinheiten im Gauß'schen System Zentimeter, Gramm und Sekunde zu wählen (daher auch cgs System). Die Einheit der Kraft ist dort  $1 \text{ dyne} = 1 \text{ g} \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} = 10^{-5} \text{ N}$ . Ladungen der Menge  $1 \text{ Fr} = 1 \text{ statC} = 1 \text{ cm} \sqrt{\text{dyne}} = 1 \text{ g}^{\frac{1}{2}} \text{ cm}^{\frac{3}{2}} \text{ s}^{-1}$  üben in  $1 \text{ cm}$  Abstand eine Kraft von  $1 \text{ dyne}$  aufeinander aus ( $1 \text{ statC} \approx 3,34 \cdot 10^{-10} \text{ C}$ ).

Zum Vergleich geht man im SI-System von der zusätzlichen Basiseinheit Ampère aus und der Ladungseinheit  $1 \text{ C} = 1 \text{ As}$ . Die Kraft, welche zwei Ladungen von  $Q=1 \text{ C}$  im Abstand von  $r=1 \text{ m}$  aufeinander ausüben, ist

$$|\vec{F}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\text{A}^2 \text{s}^2}{\text{m}^2}$$



1 Franklin

In den Proportionalitätsfaktor geht dann die elektrische Feldkonstante  $\epsilon_0 = 8,854 \dots \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$  ein.

$$(\text{Einheiten: } 1 \text{ V} = 1 \frac{\text{J}}{\text{C}} = 1 \frac{\text{Nm}}{\text{As}} \rightarrow 1 \frac{\text{As}}{\text{Vm}} = \frac{\text{A}^2 \text{s}^2}{\text{Nm}^2})$$

In diesem Zugang ist also  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ . Aufgrund der

Wahl der Basiseinheiten m, kg, s und A spricht man hier auch vom MKSA-System. Wir werden später noch die Maxwell-Gleichungen in den verschiedenen Einheitensystemen diskutieren, kehren nun aber zur elektrostatischen Wechselwirkung zurück.

Weiterhin beobachtet man, daß das Superpositionsprinzip gilt:

Die von einzelnen Punktladungen erzeugten Felder addieren sich vektoriell zum Gesamtfeld.

Dies bedeutet, es gilt

$$\vec{E}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n q_i \frac{\vec{x} - \vec{x}_i}{|\vec{x} - \vec{x}_i|^3}$$

Für kontinuierliche Ladungsverteilungen finden wir im Volumenelement  $d^3x'$  die Ladung  $dq = \rho(\vec{x}') d^3x'$ , wobei  $\rho$  die Ladungsdichte ist.

$$\rightarrow d\vec{E}(\vec{x}) = dq \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

$$\rightarrow \vec{E}(\vec{x}) = \int d^3x' \rho(\vec{x}') \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

Der Fluß durch die Oberfläche  $\partial V$  eines Volumens  $V$  ist damit gegeben durch

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} d\vec{a} \cdot \vec{E}(\vec{x}) &= \int_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \int_V d^3x \int d^3x' \rho(\vec{x}') \vec{\nabla}_x \cdot \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \\ &= - \int_V d^3x \int d^3x' \rho(\vec{x}') \Delta_x \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \end{aligned}$$

$$= 4\pi \int_V d^3x \int d^3x' \rho(\vec{x}') \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') = 4\pi \int_V d^3x \rho(\vec{x})$$

Diese Beziehung nennt man das Gauß'sche Gesetz der Elektrostatik. Wenden wir darauf den Gauß'schen Integralsatz an, so erhalten wir

$$\int_V d^3x (\vec{\nabla} \cdot \vec{E} - 4\pi \rho) = 0$$

Da dies für beliebige  $V$  gilt, erhalten wir eine der Maxwell-Gleichungen, welche auch differentielle Form des Gauß'schen Gesetzes heißt:

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi \rho}$$

Als nächstes sehen wir, daß  $\vec{E}$  in der Elektrostatik ein Gradientenfeld ist:

$$\vec{E}(\vec{x}) = \int d^3x' \rho(\vec{x}') \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = - \int d^3x' \rho(\vec{x}') \vec{\nabla}_x \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

$$= - \vec{\nabla} \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Das elektrische Feld ist in der Elektrostatik also rotationsfrei:

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0}$$

Während das Gauß'sche Gesetz auch für zeitabhängige Felder gültig ist, werden wir letztere Beziehung in der Elektrodynamik noch modifizieren müssen.

Es liegt nahe, nun den Helmholtz'schen Satz anzu-

wenden, und das skalare Potential  $\phi$  zu definieren:

$$\phi(\vec{x}) = \int d^3x' \frac{e(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \longrightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi$$

Es besteht ein natürlicher Zusammenhang mit der mechanischen Arbeit, welche zu verrichten ist, eine Ladung  $q$  von einem Punkt  $A$  zu einem Punkt  $B$  entlang der Kurve  $\vec{l}$  zu bringen:

$$W = - \int_A^B d\vec{l} \cdot \vec{F} = -q \int_A^B d\vec{l} \cdot \vec{E} = q \int_A^B d\vec{l} \cdot \vec{\nabla} \phi = q \int_A^B d\phi = q(\phi_B - \phi_A)$$

(mit  $\phi_{A,B}$  dem Potential am Punkt  $A$  bzw.  $B$ )

Damit hat  $q\phi$  die Bedeutung der potentiellen Energie des Testteilchens im elektrostatischen Feld.

Weiterhin gilt für das Linienintegral

$$\int_A^B d\vec{l} \cdot \vec{E} = \phi_A - \phi_B$$

und somit für geschlossene Wege

$$\oint_{\partial A} d\vec{l} \cdot \vec{E} = 0 \quad \text{wobei } A \text{ die umschlossene Fläche sei.}$$

$$\text{Stokes'scher Satz} \longrightarrow \int_A d\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

Da  $A$  beliebig ist, finden wir wiederum  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ .  
Konservative Kraftfelder sind rotationsfrei.

Für vorgegebene Ladungsverteilungen können wir das skalare Potential sowie das elektrische Feld

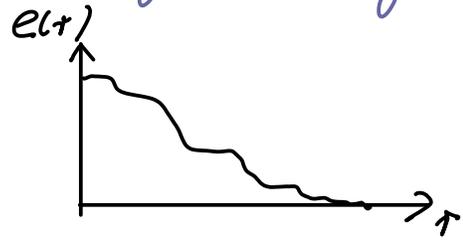
durch Berechnung eines Integrals bestimmen. Dazu betrachten wir nun ein

Beispiel: Radialsymmetrische Ladungsverteilung

$$\rho(\vec{r}) \equiv \rho(r) \text{ mit } r = |\vec{r}|$$

Integriere über  $d^3x'$ ,  $r' = |\vec{r}'|$

$\vartheta', \varphi'$ : Winkel von  $\vec{r}'$  relativ zu  $\vec{r}$ .



$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \vartheta'}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \phi(r) &= \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi} \underbrace{\sin \vartheta' d\vartheta'}_{=-1} \int_0^{\infty} r'^2 dr' \frac{\rho(r')}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \vartheta'}} \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} r'^2 dr' \rho(r') \left[ -\frac{1}{rr'} \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \vartheta'} \right]_{\cos \vartheta' = -1}^{\cos \vartheta' = 1} \end{aligned}$$

$$= 2\pi \int_0^{\infty} r' dr' \rho(r') \frac{1}{r} \left[ (r+r') - |r-r'| \right]$$

$$= \frac{2\pi}{r} \int_0^{\infty} r' dr' \rho(r') \begin{cases} 2r' & \text{für } r' < r \\ 2r & \text{für } r' > r \end{cases}$$

$$= 4\pi \left( \frac{1}{r} \int_0^r r'^2 dr' \rho(r') + \int_r^{\infty} r' dr' \rho(r') \right)$$

Die Ladungsdichte muß damit schneller als  $\frac{1}{r^2}$  fallen, damit das Integral konvergiert.

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \phi(\vec{r}) = -\underbrace{\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}}_{=\hat{r}} \frac{\partial}{\partial r} \phi(r) = \hat{r} 4\pi \frac{1}{r^2} \int_0^r r'^2 dr' \rho(r')$$

Man beachte dabei, daß die Ableitungen, welche auf die Integrationsgrenzen wirken, sich herausheben.

Alternativ können wir den Gauß'schen Satz mit  $V$  einer Kugel vom Radius  $r$  anwenden:

$$\int_{\partial V} d\vec{a} \cdot \vec{E} = 4\pi r^2 |\vec{E}(r)| = 4\pi \int_0^r r'^2 dr' \underbrace{4\pi \rho(r')}_{=\vec{\nabla} \cdot \vec{E}}$$

$$\rightarrow \vec{E}(r) = \frac{1}{r} \frac{4\pi}{r^2} \int_0^r r'^2 dr' \rho(r')$$

Wir illustrieren dieses Resultat für eine homogene Ladungsdichte innerhalb  $R$  mit der Gesamtladung  $Q$

$$\rho(r) = \rho_0 \mathcal{D}(R-r) \quad \rho_0 = \frac{3Q}{4\pi R^3}$$

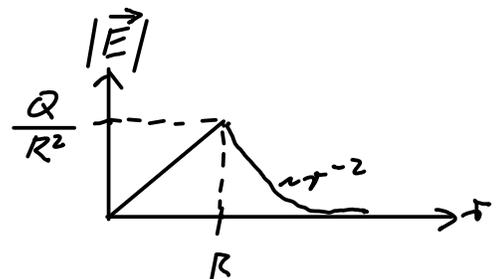
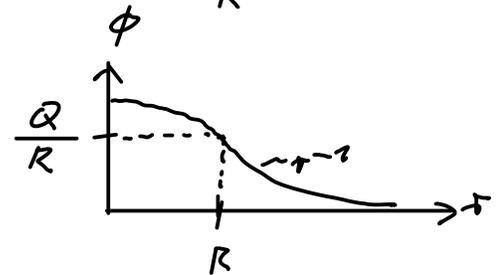
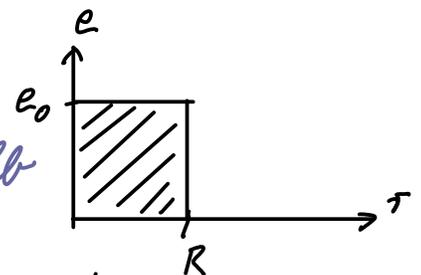
$r < R$ :

$$\phi(r) = \frac{3Q}{R^3} \left( \frac{r^2}{3} - \frac{r^2}{2} + \frac{R^2}{2} \right) = \frac{Q}{2R^3} (3R^2 - r^2)$$

$r > R$ :

$$\phi(r) = \frac{3Q}{R^3} \frac{1}{r} \frac{R^3}{3} = \frac{Q}{r}$$

$$|\vec{E}(r)| = -\phi'(r) = \begin{cases} \frac{Qr}{R^3} & \text{für } r < R \\ \frac{Q}{r^2} & \text{für } r > R \end{cases}$$



Beispiel: Flächenladung

Fläche  $A$  mit Flächenladungsdichte  $\sigma(\vec{r})$  für  $\vec{r} \in A$ .

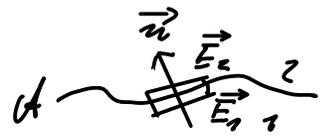
Die Flächennormale  $\vec{n}$  zeige von Seite 1 zur Seite 2.

„Gauß'sches Kästchen“  $D$  der Höhe  $d$  (vernachlässigbar

klein) und Fläche  $A$  auf der Fläche  $\mathcal{A}$ .

→

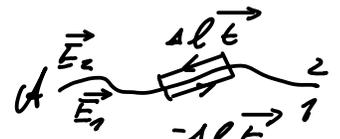
$$\int_D d^3x \rho(\vec{x}) = A \sigma = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} d\vec{a} \cdot \vec{E} = \frac{A}{4\pi} (\vec{n} \cdot \vec{E}_2 - \vec{n} \cdot \vec{E}_1)$$



Mit  $A$  beliebig folgt:  $\vec{n} \cdot (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 4\pi \sigma$

D.h. die Normalkomponente des elektrischen Feldes springt beim Durchgang durch eine geladene Fläche um  $4\pi$  mal der Flächenladungsdichte.

Legt man eine Schleife  $S$  der Länge  $\Delta l$  tangential entlang eines Vektors  $\vec{t}$  in  $\mathcal{A}$ .



$$\int_S d\vec{S} \cdot \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{E}}_{=0} = \oint_{\partial S} d\vec{\tau} \cdot \vec{E} = \Delta l \vec{t} \cdot (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$$

Dies gilt für beliebige Tangentenvektoren, also können wir schreiben  $\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$ .

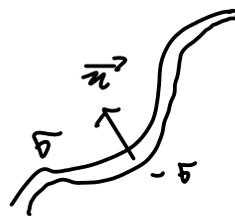
Die Tangentialkomponenten des elektrischen Feldes sind stetig beim Durchgang durch eine geladene Fläche.

Ein wichtiger Spezialfall ist die Oberfläche eines Leiters (z.B. Metall). Innerhalb verschwindet das Potential und damit auch das  $\vec{E}$ -Feld. Das Feld steht senkrecht auf der Oberfläche und führt zur Influenzladung

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} \vec{n} \cdot \vec{E}$$

Wir betrachten noch eine Dipolschicht, welche durch zwei Flächenladungen  $\pm \sigma$  im Abstand  $d$  erzeugt

wird:  $D(\vec{x}) = \lim_{d(\vec{x}) \rightarrow 0} \sigma(\vec{x}') d(\vec{x}')$



→

$$\phi(\vec{x}) = \int_S da' \left( \frac{\sigma(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \frac{\sigma(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}' + \vec{n}'d|} \right)$$

$$\frac{1}{|\vec{x} + \vec{a}|} \stackrel{\uparrow}{=} \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{x}}} = \frac{1}{x} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{x}}{x^3} + \dots = \frac{1}{x} + \vec{a} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{x} + \dots$$

$$a \equiv |\vec{a}| \ll |\vec{x}| \equiv x$$

→

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}) &= \int_S da' \sigma(\vec{x}') d \vec{n}' \cdot \vec{\nabla}'_{x'} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \int_S da' D(\vec{x}') \vec{n}' \cdot \vec{\nabla}'_{x'} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\ &= \int_S da' D(\vec{x}') \frac{\partial}{\partial u'} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \end{aligned}$$

## 2.2 Energiedichte des elektrischen Feldes

Wir können das skalare Potential  $\phi$  so wählen, daß es in der ladungsfreien Region im Unendlichen verschwindet. Die Arbeit, eine Ladung  $q_i$  vom Unendlichen zu einem Punkt  $\vec{x}_i$  zu befördern ist dann

$$W_i = q_i \phi(\vec{x}_i)$$

Angenommen, das Potential wird erzeugt von  $n-1$  Ladungen  $q_j$  ( $j=1,2,\dots,n-1$ ), dann lautet es

$$\phi(\vec{x}_i) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|} \longrightarrow W_i = q_i \sum_{j=1}^{n-1} \frac{q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|}$$

Bringen wir die Ladungen nacheinander aus dem Unendlichen in die gegebene Konfiguration, so ist folgende Arbeit zu leisten:

$$W = \sum_{i=1}^n \sum_{j < i} \frac{q_i q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{q_i q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|}$$

Für kontinuierliche Ladungsverteilung (oberer Fall der Punktladungen ergibt sich mit Gebrauch der  $\delta$ -Funktion)

$$W = \frac{1}{2} \int d^3x \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}) \rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{2} \int d^3x \rho(\vec{x}) \phi(\vec{x})$$

In dieser Herangehensweise wird die Energie als potentielle Energie der Ladungen interpretiert. Wir zeigen nun, daß diese im elektrischen Feld „gespeichert“ ist.

$$W = \frac{1}{2} \int d^3x \phi(\vec{x}) \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = -\frac{1}{8\pi} \int d^3x \phi(\vec{x}) \Delta \phi(\vec{x})$$

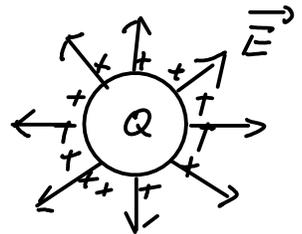
$$= \frac{1}{8\pi} \int d^3x |\vec{\nabla} \phi|^2 = \frac{1}{8\pi} \int d^3x |\vec{E}|^2$$

partielle  
Integration

Die Energiedichte des elektrischen Feldes ist also

$$w(\vec{x}) = \frac{1}{8\pi} |\vec{E}(\vec{x})|^2$$

Beispiel: geladene Metallkugel, Radius  $R$



$$\vec{E}(\vec{r}) = \hat{r} E(r), \quad r \equiv |\vec{r}| \quad E \equiv |\vec{E}|$$

$$\int_{\partial V} d\vec{a} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = 4\pi \int_V d^3x \rho(\vec{x}) \xrightarrow{\text{außerhalb}} 4\pi r^2 E(r) = 4\pi Q$$

$$\rightarrow E(r) = \begin{cases} \frac{Q}{r^2} & \text{für } r > R \\ 0 & \text{für } r < R \end{cases}$$

Energie der Flächenladungsdichte  $\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$ :

$$W = \frac{1}{2} \int_{|\vec{x}'|=R} d^3x' \int_{|\vec{x}|=R} d^3x \left( \frac{Q}{4\pi R^2} \right)^2 \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

$$\frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{\sqrt{2R^2 - 2R^2 \cos \vartheta}}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{|\vec{x}'|=R} d^3x' \int_{|\vec{x}|=R} d^3x \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\ &= \frac{1}{2} 4\pi R^4 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 d\cos \vartheta \frac{1}{\sqrt{2}R} \frac{1}{\sqrt{1 - \cos \vartheta}} = \frac{4\pi^2 R}{\sqrt{2}} \left[ -2\sqrt{1-x} \right]_{x=-1}^{x=1} \\ &= 8\pi^2 R^3 \end{aligned}$$

→

$$W = \frac{Q^2}{2R}$$

Vgl. Feldenergie:  $W = \frac{1}{8\pi} 4\pi \int_R^\infty r^2 dr \left( \frac{Q}{r^2} \right)^2 = \frac{Q^2}{2} \left[ \frac{-1}{r} \right]_R^\infty = \frac{Q^2}{2R}$

## 2.3 Randwertprobleme

Mit dem Gauß'schen Gesetz  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi \rho$  und  $\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi$  folgt die Poisson-Gleichung:

$$\Delta \phi = -4\pi \rho$$

In Regionen ohne Ladungsdichte erhalten wir die Laplace-Gleichung:

$$\Delta \phi = 0$$

Wir können sofort nachprüfen, daß die Lösung für  $\phi$  bei vorgegebener Ladungsverteilung die Poisson-Gleichung löst:

$$\Delta \phi(\vec{x}) = \Delta \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = -4\pi \int d^3x' \rho(\vec{x}') \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') = -4\pi \rho(\vec{x})$$

Ist  $\rho(\vec{x})$  auf eine Raumregion beschränkt, so ist klar, daß  $\phi(\vec{x}) \rightarrow 0$  für  $|\vec{x}| \rightarrow \infty$ , d.h.  $\phi$  erfüllt eine gewisse Randbedingung. Andere Randbedingungen können offenbar durch Addition von Lösungen zur Laplace-Gleichung erfüllt werden.

Zur weiteren Diskussion dieser allgemeineren Randbedingungen erinnern wir zunächst an die zweite Green'sche Identität

$$\int_V d^3x' (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) = \int_{\partial V} da' \left( \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n'} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n'} \right)$$

und setzen darin  $\varphi = \phi$  sowie  $\psi = \frac{1}{R} = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$

→

$$\int_V d^3x' \left( -4\pi \phi(\vec{x}') \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') + \frac{4\pi}{R} \rho(\vec{x}') \right) = \int_{\partial V} da' \left( \phi \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{R} - \frac{1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial n'} \right)$$

Aufgelöst nach  $\phi$  (für  $\vec{x} \in V$ ):

$$\phi(\vec{x}) = \int_V d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{R} + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} da' \left( \frac{1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial n'} - \phi \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{R} \right)$$

Der erste Zusatzterm entspricht dem von einer Flächenladungsdichte  $\sigma = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \phi}{\partial n'}$  erzeugten Potential, der zweite Term von einer Flächendipoldichte  $-\frac{\phi}{4\pi}$ .

Kategorisierung der Randbedingungen:

Dirichlet Randbedingungen:  $\phi(\vec{x})$  ist auf einer geschlossenen Fläche  $\partial V$  vorgegeben.

Neumann Randbedingungen:  $\frac{\partial \phi}{\partial n} = \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \phi$  (d.h. die Normalkomponente des  $\vec{E}$ -Feldes) ist auf geschlossener Fläche  $\partial V$  vorgegeben.

Die Vorgabe von Dirichlet oder Neumann Bedingungen bestimmt  $\phi$  innerhalb von  $V$  eindeutig.

Beweis: Seien  $\phi_{1,2}$  zwei Lösungen, betrachte Differenz

$$u = \phi_1 - \phi_2$$

$\rightarrow \Delta u = 0$  in  $V$  und  $u = 0$  bzw.  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$  auf  $\partial V$

Benutze 1. Green'sche Identität

$$\int_V d^3x (\varphi \Delta \psi + (\vec{\nabla} \varphi) \cdot (\vec{\nabla} \psi)) = \int_{\partial V} da \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n}$$

mit  $\varphi = \psi = u \rightarrow$

$$\int_V d^3x (\vec{\nabla} u)^2 = \int_{\partial V} da u \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad \text{da wenigstens ein Faktor im 2. Term verschwindet.}$$

Damit ist  $\vec{\nabla} u \equiv 0$  und somit  $u \equiv \text{const.}$  innerhalb von  $V$ .

Dirichlet:  $u \equiv 0$  wegen Stetigkeit in  $V$

Neumann: Die Differenz zwischen den Lösungen ist eine Konstante ohne Konsequenz für das physikalische Feld  $\vec{E}$ .

Bemerkung: Faraday-Käfig

Ladungsfreier Innenraum einer geschlossenen Metallfläche:

$\Delta \phi = 0$  in  $V$  und  $\phi = \text{const.}$  auf  $\partial V$

Offenbar ist  $\phi = \text{const.}$  eine Lösung in  $V$ , und diese ist eindeutig, so daß immer  $\vec{E} = 0$  innerhalb  $V$  gelten muß.

Green'sche Funktion

Die allgemeine Lösung zu

$$\Delta_x G(\vec{x}, \vec{x}') = -4\pi \delta^3(\vec{x} - \vec{x}')$$

lautet

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + F(\vec{x}, \vec{x}') \quad \text{mit einer Lösung der Laplace-Gleichung } \Delta_x F(\vec{x}, \vec{x}') = 0.$$

Damit folgt für das Potential

$$\phi(\vec{x}) = \int_V d^3x' G(\vec{x}, \vec{x}') \rho(\vec{x}')$$

$G$  heißt Green'sche Funktion, und den Randbedingungen ist durch geeignete Wahl von  $F$  zu genügen. Dazu wollen wir in obiger Integralgleichung für  $\phi$ , in welcher sowohl Dirichlet- als auch Neumann-

Randterme auftröben, jeweils einen Typ Randterm eliminieren. Wir verallgemeinern in obiger Lösung zunächst  $\psi(\vec{x}') = G(\vec{x}, \vec{x}')$  und erhalten so

$$\phi(\vec{x}) = \int_V d^3x' G(\vec{x}, \vec{x}') \rho(\vec{x}') + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} da' \left( G(\vec{x}, \vec{x}') \frac{\partial \phi}{\partial n'} - \phi \frac{\partial G(\vec{x}, \vec{x}')}{\partial n'} \right)$$

Für Dirichlet-Randbedingungen verlangen wir nun

$$G_D(\vec{x}, \vec{x}') = 0 \quad \text{für } \vec{x}' \in \partial V$$

→

$$\phi(\vec{x}) = \int_V d^3x' G_D(\vec{x}, \vec{x}') \rho(\vec{x}') - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} da' \phi \frac{\partial G_D(\vec{x}, \vec{x}')}{\partial n'}$$

wobei  $\rho(\vec{x})$  für  $\vec{x} \in V$  und  $\phi(\vec{x})$  für  $\vec{x} \in \partial V$  vorgegeben sind.

Wir zeigen noch, daß  $G_D$  symmetrisch ist,

$$G_D(\vec{x}, \vec{x}') = G_D(\vec{x}', \vec{x}).$$

Setze in 2. Green'scher Identität

$$\int d^3x' (\phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi) = \int_{\partial V} da' \left( \phi \frac{\partial \psi}{\partial n'} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n'} \right)$$

$$\phi(\vec{x}') = G_D(\vec{y}, \vec{x}') \quad \text{und} \quad \psi(\vec{x}') = G_D(\vec{z}, \vec{x}')$$

→

$$-4\pi \int d^3x' (G_D(\vec{y}, \vec{x}') \delta^3(\vec{x}' - \vec{z}) - G_D(\vec{z}, \vec{x}') \delta^3(\vec{x}' - \vec{y}))$$

$$= 4\pi (G_D(\vec{z}, \vec{y}) - G_D(\vec{y}, \vec{z}))$$

$$= \int_{\partial V} da' (G_D(\vec{y}, \vec{x}') \hat{n}' \cdot \vec{\nabla}_{x'} G_D(\vec{z}, \vec{x}') - G_D(\vec{z}, \vec{x}') \hat{n}' \cdot \vec{\nabla}_{x'} G_D(\vec{y}, \vec{x}'))$$

= 0 womit die Behauptung bewiesen ist.

Physikalisch bedeutet dies, daß die Green'sche Funktion die Wechselwirkungsenergie zweier Punktladungen in Gegenwart von Bildladungen wiedergibt (also z.B. die Dipolfläche), welche die Potentiale der Punktladungen abschirmen.

Zur Erfüllung von Neumann Randbedingungen merken wir zunächst an:

$$\Delta_{\vec{x}} G(\vec{x}, \vec{x}') = -4\pi \delta(\vec{x}, \vec{x}')$$

$$\xrightarrow{\text{Goursat}} \oint_{\partial V} \frac{\partial G}{\partial n'} da' = -4\pi$$

Wir verlangen daher

$$\frac{\partial G_N}{\partial n'}(\vec{x}, \vec{x}') = -\frac{4\pi}{S} \quad \text{wobei } S \text{ die Fläche von } \partial V \text{ ist.}$$

$$\text{Mit } \langle \phi_S \rangle = \frac{1}{S} \int_{\partial V} da' \phi(\vec{x}')$$

und

$$\phi(\vec{x}) = \langle \phi \rangle_S + \int_V d^3x' G_N(\vec{x}, \vec{x}') \rho(\vec{x}') + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} da' \frac{\partial \phi}{\partial n'} G_N(\vec{x}, \vec{x}')$$

erhalten wir die Lösung des Neumann-Problems.

Beispiel: Punktladung vor unendlich ausgedehnter, geerdeter Metallplatte

$V$  ist das obere Halbraum  $x_3 > 0$ ,  $\partial V$  die  $x_1 x_2$ -Ebene

$$G_D(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \frac{q_I}{|\vec{x} - \vec{x}''|} = 0 \quad \forall \vec{x}' \in \partial V$$

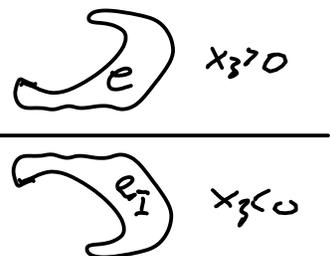
Mit  $x_1^I = x_1'$   $x_2^I = x_2'$   $x_3^I = -x_3'$  und  $q_I = -1$  erfüllen wir diese Randbedingung.

$$G_D(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{\sqrt{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + (x_3 - x_3')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + (x_3 + x_3')^2}}$$

→ Symmetrisch in  $\vec{x} \leftrightarrow \vec{x}'$

Diese Green'sche Funktion stellt eine zur wahren Ladungsdichte entgegengesetzte fiktive Ladung auf der anderen Seite der Platte vor.

Wir setzen nun eine Punktladung  $Q$  im den Punkt  $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$ .



→

$$\phi(\vec{x}) = \frac{Q}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - a)^2}} - \frac{Q}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + (x_3 + a)^2}} \quad \text{für } x_3 > 0$$

## Elektrisches Feld

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla} \phi(\vec{x}) = \frac{Q(x_1, x_2, x_3 - a)^T}{(x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - a)^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{Q(x_1, x_2, x_3 + a)^T}{(x_1^2 + x_2^2 + (x_3 + a)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Auf der Platte,  $x_3 = 0$ ,

$$\vec{E}((x_1, x_2, 0)^T) = \frac{-2Qa}{(x_1^2 + x_2^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{e}_3$$

Wie erwartet steht diese normal zur Grenzfläche.

Influenzladungsdichte:

$$\sigma = \hat{e}_3 \cdot \vec{E} = -\frac{1}{2\pi} \frac{Qa}{(x_1^2 + x_2^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Influenzladung insgesamt:

$$Q_I = \int dx_1 dx_2 \sigma = -\frac{Qa}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} dr \frac{r}{(r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} = -Qa \left[ -\frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right]_0^{\infty} = -Q$$

$Q$  wird von der Influenzladung mit der entgegengesetzten Kraft angezogen, welche es selbst auf die Metallplatte ausübt:

$$\vec{F} = \int dx_1 dx_2 \sigma(x_1, x_2) \vec{E}_Q((x_1, x_2, 0)^T) \quad (\text{Kraft auf Platte})$$

Dabei ist  $\vec{E}_Q$  der allein von  $Q$  erzeugte Beitrag zum Feld:

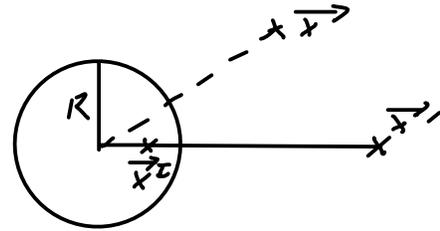
$$\vec{E}_Q = Q \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -a \end{pmatrix} \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\vec{F} = \hat{e}_z \frac{Qa}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} dr \frac{r Qa}{(r^2 + a^2)^3} = \hat{e}_z Q^2 a^2 \left[ -\frac{1}{4} \frac{1}{(r^2 + a^2)^2} \right]_0^{\infty} = \hat{e}_z \frac{Q^2}{(2a)^2}$$

Dies entspricht der Coulomb-Wchselwirkung von zwei entgegengesetzten Ladungen  $\pm Q$  im Abstand  $2a$ .

### Beispiel: Geerdete Metallkugel

Als Ansatz setzen wir wieder eine Bildladung an einem Punkt  $\vec{x}^I \parallel \vec{x}$ :



$$\vec{x} \cdot \vec{x}^I = \cos \alpha$$

$$G_D(\vec{x}, \vec{x}^I) = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}^I|} + \frac{q_I}{|\vec{x} - \vec{x}^I|}$$

Randbedingung:

$$G_D(\vec{x}, \vec{x}^I) = 0 \quad \text{für } |\vec{x}| = R$$

$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2 - 2xR \cos \alpha}} + \frac{q_I}{\sqrt{R^2 + x^{I2} - 2Rx^I \cos \alpha}} = 0 \quad \text{mit } x > R, x^I < R$$

→

$$\frac{q_I}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2} - 2\frac{x}{R} \cos \alpha}} + \frac{1}{x^I} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{x^{I2}} - 2\frac{R}{x^I} \cos \alpha}} = 0$$

→

$$q_I = -\frac{R}{x^I} \quad \text{und} \quad \frac{x^I}{R} = \frac{R}{x^I} \quad \rightarrow \quad \vec{x}^I = \frac{R^2}{x^I} \frac{\vec{x}}{x^I}$$

→

$$G_D(\vec{x}, \vec{x}^I) = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}^I|} - \frac{R}{x^I} \frac{1}{\left| \vec{x} - \frac{R^2}{x^I} \frac{\vec{x}}{x^I} \right|}$$

$$= \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}^I|} - \frac{1}{\left| \frac{x^I}{R} \vec{x} - \frac{R}{x^I} \vec{x}^I \right|}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2 + x^{I2} - 2xx^I \cos \alpha}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{x^{I2}x^2}{R^2} + R^2 - 2xx^I \cos \alpha}}$$

→ symmetrisch

Der Vollständigkeit halber notieren wir noch die Normalenableitung ( $\frac{\partial}{\partial n'} = -\frac{\partial}{\partial x'}$ , da  $\vec{n}'$  in die Kugel zeigt)

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_D}{\partial n'} \Big|_{x'=R} &= \frac{x' - x \cos \alpha}{(x^2 + x'^2 - 2xx' \cos \alpha)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\frac{x'x^2}{R^2} - x \cos \alpha}{\left(\frac{x'^2 x^2}{R^2} + R^2 - 2xx' \cos \alpha\right)^{\frac{3}{2}}} \Big|_{x'=R} \\ &= \frac{R - \frac{x^2}{R}}{(x^2 + R^2 - 2xR \cos \alpha)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x^2 - R^2}{R(x^2 + R^2 - 2xR \cos \alpha)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Damit können wir  $\phi$  auf der Kugel vorgeben, d.h.

$$\phi(\vec{x}) = \int_V d^3x' G_D(\vec{x}, \vec{x}') e(\vec{x}') - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} da' \phi \frac{\partial G_D(\vec{x}, \vec{x}')}{\partial x'}$$

Letzterer Term ist natürlich im Fall der geerdeten Kugel,  $\phi(\vec{x}) = 0$  für  $|\vec{x}'| = R$  nicht nötig. Die Punktladung ist man charakterisiert durch  $e(\vec{x}) = Q \delta^3(\vec{x} - \vec{a})$ , so daß wir fürs Potential der Punktladung im Punkt  $\vec{a}$  außerhalb der geerdeten Metallkugel erhalten:

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}) &= Q \int_V d^3x' \delta^3(\vec{x}' - \vec{a}) G_D(\vec{x}, \vec{x}') \\ &= \frac{Q}{|\vec{x} - \vec{a}|} - \frac{Q}{\left| \frac{a}{R} \vec{x} - \frac{R}{a} \vec{a} \right|} \end{aligned}$$

## 2.4 Entwicklung nach orthogonalen Funktionen

$U_n(\xi)$ ,  $n=1,2,\dots$ : Satz reell- oder komplexwertiger Funktionen

Die  $U_n$  sind orthogonal auf  $I_a; b[$ , wenn gilt:

$$\int_a^b d\xi U_n^*(\xi) U_m(\xi) = 0 \quad \text{für } m \neq n$$

Der Satz heißt orthonormal, sofern wie folgt normiert:

$$\int_a^b d\xi U_n^*(\xi) U_m(\xi) = \delta_{nm}$$

Ist  $f(\xi)$  quadratintegrabel auf  $]a; b[$ , dann gilt

$$f(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n U_n(\xi) \quad \text{mit} \quad a_n = \int_a^b d\xi U_n^*(\xi) f(\xi)$$

wie man sofort durch Einsetzen von  $f(\xi)$  verifiziert. Andererseits gilt

$$f(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b d\xi' U_n^*(\xi') f(\xi') U_n(\xi) = \int_a^b d\xi' \sum_{n=1}^{\infty} U_n^*(\xi') U_n(\xi) f(\xi')$$

$$\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} U_n^*(\xi') U_n(\xi) = \delta(\xi - \xi') \quad \text{(Vollständigkeit)}$$

Das berühmteste Beispiel ist die Fourier-Entwicklung orthogonaler Funktionen auf  $]-\frac{a}{2}; \frac{a}{2}[$ :

$$\sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{2\pi m x}{a} \quad \text{und} \quad \sqrt{\frac{2}{a}} \cos \frac{2\pi m x}{a}$$

→

$$f(x) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left[ A_m \cos \frac{2\pi m x}{a} + B_m \sin \frac{2\pi m x}{a} \right]$$

$$A_m = \frac{2}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx f(x) \cos \frac{2\pi m x}{a}, \quad B_m = \frac{2}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx f(x) \sin \frac{2\pi m x}{a}$$

Die Entwicklung nach orthogonalen Funktionen lässt sich auch auf mehrere Dimensionen verallgemeinern.

Z.B. 2 Dimensionen

$$U_n(\xi), \quad \xi \in ]a; b[ \quad \text{und} \quad V_m(\eta), \quad \eta \in ]c; d[$$

→

$$f(\xi, \eta) = \sum_n \sum_m a_{nm} U_n(\xi) V_m(\eta)$$

$$a_{nm} = \int_a^b d\xi \int_c^d d\eta U_n^*(\xi) V_m^*(\eta) f(\xi, \eta)$$

Für  $[a; b]$  unendlich lang erhalten wir ein Kontinuum von Funktionen an Stelle einer abzählbaren Menge. Wichtigstes Beispiel sind die Fourierintegrale.

$$U_m = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{i \frac{2\pi m x}{a}} : \text{orthogonales Funktionensystem auf } ]-\frac{a}{2}; \frac{a}{2}[$$

$$\rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m e^{i \frac{2\pi m x}{a}} \text{ mit } A_m = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx f(x) e^{-i \frac{2\pi m x}{a}}$$

$$\text{Nun } a \rightarrow \infty, \frac{2\pi m}{a} \rightarrow k, \sum_m \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dm = \frac{a}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk, A_m \rightarrow \frac{1}{\sqrt{a}} A_k$$

$$\rightarrow f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} A(k) \text{ mit } A(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x)$$

$$\text{Orthogonalität: } \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{i(k-k')x} = 2\pi \delta(k-k')$$

$$\text{Vollständigkeit: } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ik(x-x')} = \delta(x-x')$$

## 2.5 Variablenseparation

Die Laplace- und Poissongleichungen sind partielle Differentialgleichungen, da sie partielle Ableitungen der Lösungsfunktion nach den verschiedenen Koordinaten beinhalten. Partielle Differentialgleichungen beschreiben zahlreiche physikalische Systeme, und oft ist der erste Schritt zu deren Lösung eine Variablentransformation, die eine Separation in gewöhnliche Differentialgleichungen erlaubt.

Die Wahl der geeigneten Koordinaten hängt typischerweise von der Geometrie des Problems ab (d.h. von den Quellen und Randbedingungen). Unter den wichtigsten Fällen sind rechteckige, sphärische und zylindrische Geometrien. Wir beginnen mit dem rechteckigen Fall. In kartesischen Koordinaten lautet die Laplace-Gleichung

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

Angenommen die Lösung hat die Produktform

$$\phi(x, y, z) = X(x) Y(y) Z(z) \longrightarrow \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0$$

Soll für beliebige Werte der einzelnen Koordinaten gelten

$$\longrightarrow \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\alpha^2, \quad \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -\beta^2, \quad \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = \gamma^2 \text{ mit } \alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$$

$$\longrightarrow \phi = e^{\pm i\alpha x} e^{\pm i\beta y} e^{\pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z}$$

Parameter  $\alpha, \beta$  werden durch Randbedingungen bestimmt.

Betrachte hier Kasten mit Längen  $(a, b, c)$ , mit verschwindendem Potential auf allen Flächen außer  $z=c$  mit Potential  $\phi(x, y, c) = V(x, y)$ .

$$\phi = 0 \text{ auf Flächen } x=0, y=0, z=0 \longrightarrow \begin{aligned} X &= \sin \alpha x \\ Y &= \sin \beta y \\ Z &= \sinh \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z \end{aligned}$$

$$\phi = 0 \text{ auf Flächen } x=a, y=b \longrightarrow \begin{aligned} \alpha a &= n\pi, \quad \beta b = m\pi \\ &\text{mit } n, m = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

$$\longrightarrow \alpha_n = \frac{n\pi}{a}, \quad \beta_m = \frac{m\pi}{b}, \quad \gamma_{nm} = \pi \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}$$

$$\rightarrow \phi(x, y, z) = \sum_{n, m=1}^{\infty} A_{nm} \sin \alpha_n x \sin \beta_m y \sinh \gamma_{nm} z$$

Randbedingung:

$$V(x, y) = \sum_{n, m=1}^{\infty} A_{nm} \sin \alpha_n x \sin \beta_m y \sinh \gamma_{nm} c$$

$$\rightarrow A_{nm} = \frac{4}{ab \sinh \gamma_{nm} c} \int_0^a dx \int_0^b dy V(x, y) \sin \alpha_n x \sin \beta_m y$$

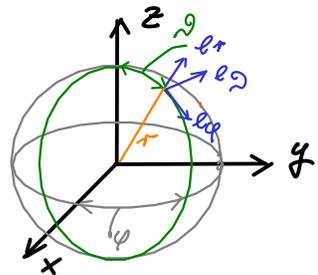
Würden wir auch nichtverschwindende Randbedingungen auf den übrigen fünf Oberflächen voraussetzen, so erhielten wir die allgemeine Lösung durch lineare Superposition der entsprechend konstruierten Potentiale.

Der hier besprochene Separationsansatz eignet sich also für auf rechtwinkligen Flächen vorgegebene Randwerte.

## 2.6 Randwertprobleme im Kugelkoordinaten

Betrachte man das sphärische Koordinatensystem mit  $\vartheta \in [0; \pi]$ ,  $\varphi \in [0; 2\pi[$ .

$$\begin{aligned} x &= r \sin \vartheta \cos \varphi \\ y &= r \sin \vartheta \sin \varphi \\ z &= r \cos \vartheta \end{aligned}$$



Um die partiellen Ableitungen im Kugelkoordinaten zu erhalten, notieren wir die Jacobi-Matrix

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \vartheta, \varphi)} = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & r \cos \vartheta \cos \varphi & -r \sin \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi & r \cos \vartheta \sin \varphi & r \sin \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta & -r \sin \vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \left( \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \vartheta}, \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) J$$

Zur Berechnung des  $\vec{\nabla}$ -Operators benötigen wir also die inverse Matrix:

$$\left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \left( \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \vartheta}, \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) J^{-1}$$

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & \sin \vartheta \sin \varphi & \cos \vartheta \\ \frac{1}{r} \cos \vartheta \cos \varphi & \frac{1}{r} \cos \vartheta \sin \varphi & -\frac{1}{r} \sin \vartheta \\ -\frac{1}{r} \frac{\sin \varphi}{\sin \vartheta} & \frac{1}{r} \frac{\cos \varphi}{\sin \vartheta} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \sin \vartheta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \vartheta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \vartheta} - \frac{1}{r} \frac{\sin \varphi}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin \vartheta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \vartheta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r} \frac{\cos \varphi}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Spalten von} \\ J^{-1} \end{array}$$

Drehung der Basisvektoren:

$$\vec{e}_r = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right|}, \quad \vec{e}_\vartheta = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} \right|}, \quad \vec{e}_\varphi = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right|}$$

$\xrightarrow{\quad}$                        $\xrightarrow{\quad}$                        $\xrightarrow{\quad}$   
 1. Spalte von  $J$                       2. Spalte von  $J$                       3. Spalte von  $J$

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta \sin \varphi \\ -\sin \vartheta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$  Gradient in Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} &= \vec{e}_r \vec{e}_r \cdot \vec{\nabla} + \vec{e}_\vartheta \vec{e}_\vartheta \cdot \vec{\nabla} + \vec{e}_\varphi \vec{e}_\varphi \cdot \vec{\nabla} \\ &= \vec{e}_r \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\vec{e}_\vartheta}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{\vec{e}_\varphi}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

Direktes Nachrechnen liefert dann:

$$\Delta = \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r}_{\frac{\partial^2}{\partial r^2}} + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$
$$= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r}$$

Dieser Operator wirkt aufs Potential  $\phi$ . Falls dieses faktorisiert gemäß

$$\phi(\vec{x}) = \frac{u(r)}{r} P(\vartheta) Q(\varphi)$$

erhalten wir aus  $\Delta \phi = 0$  (multipliziert von links mit  $r$ ):

$$PQ \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{uQ}{r^2 \sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \sin \vartheta \frac{dP}{d\vartheta} + \frac{uP}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{d^2 Q}{d\varphi^2} = 0$$

$$\rightarrow r^2 \sin^2 \vartheta \left[ \frac{1}{u} \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{P} \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \sin \vartheta \frac{dP}{d\vartheta} \right] + \frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\varphi^2} = 0$$

Um dies für beliebige Werte von  $q$  zu erfüllen, muß der letzte Term konstant sein,

$$\frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\varphi^2} = -m^2$$

Diese gewöhnliche Differentialgleichung hat die Lösungen

$$Q = e^{\pm im\varphi} \quad \text{mit} \quad Q(\varphi) = Q(\varphi + 2\pi n) \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{Z} \rightarrow m \in \mathbb{Z}$$

$$\rightarrow \frac{r^2}{u} \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{P} \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \sin \vartheta \frac{dP}{d\vartheta} = \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta}$$

Wenn der Separationsansatz gültig ist, sollten die  $\vartheta$ -abhängigen Terme wiederum konstant sein.

$$\text{Wir substituieren } x = \cos \vartheta \Rightarrow \frac{d}{dx} = -\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \frac{1}{P} \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left( \sin^2 \vartheta \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{dP}{d\vartheta} \right) &= \frac{1}{P} \frac{d}{dx} \left( (1-x^2) \frac{d}{dx} P \right) \\ &= \frac{m^2}{1-x^2} - l(l+1) \end{aligned}$$

Dabei haben wir die Konstante gleich  $-l(l+1)$  gesetzt.

Es folgen die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dx} \left( (1-x^2) \frac{dP}{dx} \right) + \left( l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right) P = 0$$

$$\frac{d^2 u}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} u = 0$$

Für die beiden Lösungen der Radialgleichung erhalten wir unmittelbar

$$u(r) = A r^{l+1} + B r^{-l}$$

Die Gleichung der Abhängigkeit vom Polwinkel wird allgemeine Legendresche Differentialgleichung genannt. Für Situationen, welche unabhängig vom Azimutwinkel  $\varphi$  sind, ist  $m^2 = 0$ .

Dann erhalten wir die Legendresche Differentialgleichung,

$$\frac{d}{dx} \left( (1-x^2) \frac{dP}{dx} \right) + l(l+1)P = 0$$

Diese wollen wir zunächst betrachten. Zur Lösung machen wir den Potenzreihenansatz

$$P(x) = x^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$$

mit  $\alpha$  einem noch zu bestimmenden Parameter.

Einsetzen in die Differentialgleichung  $\rightarrow$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left\{ (\alpha+j)(\alpha+j-1) a_j x^{\alpha+j-2} - [(\alpha+j)(\alpha+j+1) - l(l+1)] a_j x^{\alpha+j} \right\} = 0$$

$$(\text{"x}^2\text{-Terme"} \rightarrow -2(\alpha+j) - (\alpha+j)(\alpha+j-1) = (\alpha+j)(\alpha+j+1))$$

Damit dies für alle  $x \in [-1; 1]$  gilt, müssen die Koeffizienten der einzelnen Potenzen separat verschwinden.

Für die beiden niedrigsten Potenzen gilt:

$$x^{\alpha+0-2}; \quad \alpha(\alpha-1) = 0 \quad \text{für } a_0 \neq 0$$

$$x^{\alpha+1-2}; \quad \alpha(\alpha+1) = 0 \quad \text{für } a_1 \neq 0$$

Die Summanden  $j \geq 2$  ergeben die Bedingungen

$$a_{j+2} = \frac{(\alpha+j)(\alpha+j+1) - l(l+1)}{(\alpha+j+1)(\alpha+j+2)} a_j$$

Die ersten beiden Bedingungen sind äquivalent. Wir

wählen daher die erste und erhalten zwei Fälle:

$\alpha=0$ : es treten nur gerade Potenzen auf

$\alpha=1$ : es treten nur ungerade Potenzen auf

Wir sehen weiterhin, daß für  $j \rightarrow \infty$  gilt:  $\frac{a_{j+2}}{a_j} \rightarrow 1$ .

Die Reihe würde dann für  $x = \pm 1$  divergieren, so daß wir stattdessen fordern  $a_j = 0$  für ein bestimmtes  $j$  (dann verschwinden wegen der Rekursion auch die höheren Koeffizienten).

$\alpha=1$  oder  $\alpha=0 \rightarrow$  Die Reihe bricht ab für  $l$  eine ganze Zahl größer gleich Null.

Dabei ist  $x^l$  die größte Potenz, und für  $\alpha=0$  wählen wir  $l$  gerade, für  $\alpha=1$  ungerade.

Die Lösungen  $P_l(x)$  heißen Legendrepolynome und sind auf  $P_l(1) = 1$  normiert (Konvention).

Die ersten Legendrepolynome:

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

Rodrigues-Formel (ohne Beweis):

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l$$

Orthogonalität:

$$0 = \int_{-1}^1 dx P_l'(x) \left[ \frac{d}{dx} \left( (1-x^2) \frac{dP_l}{dx} \right) + l(l+1) P_l \right]$$

$$= \int_{-1}^1 dx \left[ (x^2-1) \frac{dP_l}{dx} \frac{dP_{l'}}{dx} + l(l+1) P_l P_{l'} \right]$$

vertausche nun  $l \leftrightarrow l'$  und bilde Differenz:

$$[l(l+1) - l'(l'+1)] \int_{-1}^1 dx P_l P_{l'} = 0$$

→ Integral verschwindet für  $l \neq l'$ .

Andernfalls gilt:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 dx [P_l(x)]^2 &= \frac{1}{2^{2l}(l!)^2} \int_{-1}^1 dx \left( \frac{d^l}{dx^l} (x^2-1)^l \right)^2 \\ &= \frac{(-1)^l}{2^{2l}(l!)^2} \int_{-1}^1 dx (x^2-1)^l \underbrace{\frac{d^{2l}}{dx^{2l}} (x^2-1)^l}_{=(2l)!} \\ &= \frac{(2l)!}{2^{2l}(l!)^2} \int_{-1}^1 dx (1-x^2)^l = \frac{(2l)!}{2^{2l}(l!)^2} \frac{2^{2l+1} (l!)^2}{(2l+1)!} \\ &= \frac{2}{2l+1} \end{aligned}$$

Berechnung des Integrals:

$$\begin{aligned} x_l &= \int_{-1}^1 dz (1-z^2)^l = \int_{-1}^1 dz (1-z^2)^{l-1} - \int_{-1}^1 dz z^2 (1-z^2)^{l-1} \\ &= x_{l-1} + \frac{1}{2l} \int_{-1}^1 dz z \frac{d}{dz} (1-z^2)^l \\ &= x_{l-1} + \frac{1}{2l} \left[ z(1-z^2)^l \right]_{-1}^1 - \frac{1}{2l} \int_{-1}^1 dz (1-z^2)^l \\ &\stackrel{P.I.}{=} x_{l-1} + \frac{1}{2l} \left[ z(1-z^2)^l \right]_{-1}^1 - \frac{1}{2l} x_{l-1} \\ &\rightarrow x_l \left( 1 + \frac{1}{2l} \right) = x_{l-1} \Leftrightarrow x_l = \frac{2l}{2l+1} x_{l-1} \end{aligned}$$

mit  $x_0 = 2$ :

$$\begin{aligned}x_l &= \frac{2l}{2l+1} \frac{2(l-1)}{2l-1} \frac{2(l-2)}{2l-3} * \dots * \frac{2 \cdot 2}{5} \frac{2 \cdot 1}{3} * 2 \\ &= \frac{2^2 l^2}{(2l+1) 2l} \frac{2^2 (l-1)^2}{(2l-1)(2l-2)} * \dots * \frac{2^2 2^2}{5 \cdot 4} \frac{2^2 \cdot 1^2}{3 \cdot 2} * 2 = \frac{2 \cdot 4^l (l!)^2}{(2l+1)!}\end{aligned}$$

Insgesamt:

$$\int_{-1}^1 dx P_{l'}(x) P_l(x) = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}$$

Entsprechend unserer obigen Definition ist der orthonormierte Satz von Funktionen gegeben durch

$$U_l(x) = \sqrt{\frac{2l+1}{2}} P_l(x)$$

Funktionen im Intervall  $[-1; 1]$  können nach Legendre = Polynomen entwickelt werden:

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l(x) \quad \text{mit} \quad A_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 dx P_l(x) f(x)$$

Beispiel Halbkugeln mit entgegengesetztem Potential  
Im Falle azimuthaler Symmetrie ist die allgemeine Lösung der Laplacegleichung nun gegeben durch:

$$\phi(r, \vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos \vartheta)$$

Ist das Potential  $V(\vartheta)$  auf einer Kugel vom Radius  $R$  gegeben, und es ist  $\phi$  im Inneren zu finden, dann muß  $B_l = 0 \forall l$  gelten, damit das Potential endlich ist.

→ entwickle 
$$V(\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l R^l P_l(\cos \vartheta)$$

$$\text{mit } A_l = \frac{2l+1}{2R^l} \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta P_l(\cos \vartheta) V(\vartheta)$$

Unser Beispiel entspricht

$$V(\vartheta) = \begin{cases} +V & \text{für } 0 \leq \vartheta < \frac{\pi}{2} \\ -V & \text{für } \frac{\pi}{2} < \vartheta \leq \pi \end{cases} \rightarrow A_l = V \frac{2l+1}{2R^l} \int_{-1}^1 dx P_l(x) \text{sign}(x)$$

$\rightarrow A_l = 0$  für  $l$  gerade

$l$  ungerade

$$A_l = \frac{2l+1}{R^l} \int_0^1 dx P_l(x) \rightarrow$$

$$A_1 = \frac{V}{R} * 3 * \frac{1}{2}$$

$$A_3 = \frac{V}{R^3} * 7 * \left(-\frac{1}{9}\right)$$

$$A_5 = \frac{V}{R^5} * 11 * \frac{1}{16}$$

$$\rightarrow \frac{\phi(r, \vartheta)}{V} = \frac{3}{2} \frac{r}{R} P_1(\cos \vartheta) - \frac{7}{8} \frac{r^3}{R^3} P_3(\cos \vartheta) + \frac{11}{16} \frac{r^5}{R^5} P_5(\cos \vartheta) + \dots$$

Für Probleme ohne azimutale Symmetrie behandeln wir nun noch den allgemeinen Fall  $m \neq 0$ . Dieser kann einerseits mit den Methoden für  $m=0$  behandelt werden, andererseits bietet der Drehimpulsformalismus einen sehr eleganten Weg an, auf den hier verwiesen wird. Hier stellen wir die wichtigsten Ergebnisse zusammen.

Die normierten Lösungen zu

$$\frac{d}{dx} \left( (1-x^2) \frac{dP}{dx} \right) + \left( l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right) P = 0$$

sind die zugeordneten Legendrepolynome.

Für  $m > 0$  können wir diese erhalten durch

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x)$$

Wiederum muß  $l \geq 0$  eine ganze Zahl sein, und zusätzlich muß gelten  $-l \leq m \leq l$ , ebenso eine ganze Zahl.

Mit der Rodrigues Formel erhalten wir auch für  $m < 0$ :

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l$$

Da die Differentialgleichung nicht von  $\text{sign } m$  abhängt, sind die Lösungen zu  $\pm m$  proportional zueinander, wobei gilt:

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x)$$

Orthogonalitätsrelation:

$$\int_{-1}^1 dx P_l^m(x) P_{l'}^m(x) = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{ll'}$$

Insgesamt können wir die winkelabhängigen Faktoren der Lösung zusammenfügen und so ein Orthonomalsystem auf der Sphäre erhalten. Dies ist gegeben durch die Kugelflächenfunktionen

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}$$

Diese sind Lösung der Differentialgleichung

$$\left[ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = -l(l+1) Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

Eigenschaften:

$$Y_{l-m}(\vartheta, \varphi) = (-1)^m Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi)$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\vartheta d\vartheta Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (\text{Orthonormalität})$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \delta(\varphi - \varphi') \delta(\cos\vartheta - \cos\vartheta') \quad (\text{Vollständigkeit})$$

Entwicklung in Kugelflächenfunktionen:

$$g(\vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \Leftrightarrow A_{lm} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\vartheta d\vartheta Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi) g(\vartheta, \varphi)$$

Für  $m=0$  gilt:  $Y_{l0}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos\vartheta)$

Für  $m \neq 0$  verschwinden die  $P_l^m(\cos\vartheta)$  wenn  $\vartheta=0, \pi$  ist

→

$$g(\vartheta=0, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} A_{l0} \quad \text{mit} \quad A_{l0} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\vartheta d\vartheta P_l(\cos\vartheta) g(\vartheta, \varphi)$$

Allgemeine Lösung des Randwertproblems in Kugelkoordinaten:

$$\phi(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-(l+1)}] Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

### Additionstheorem für Kugelflächenfunktionen

Betrachte zwei Vektoren  $\vec{x}$  und  $\vec{x}'$  in Kugelkoordinaten  $(r, \vartheta, \varphi)$  bzw.  $(r', \vartheta', \varphi')$ . Der Winkel zwischen diesen sei  $\gamma$ . Dann lautet das Additionstheorem:

$$P_l(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

## Beweis

Wir entwickeln  $\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$  (mit  $x \equiv |\vec{x}|$ ,  $x' \equiv |\vec{x}'|$ )

$$\begin{aligned}\vec{x} \cdot \vec{x}' &= xx' (\sin \vartheta \sin \vartheta' (\cos \varphi \cos \varphi' + \sin \varphi \sin \varphi') + \cos \vartheta \cos \vartheta') \\ &= xx' (\sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\varphi - \varphi') + \cos \vartheta \cos \vartheta')\end{aligned}$$

$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$  ist Lösung der Laplacegleichung und symmetrisch um die  $\vec{x}'$ -Achse

$$r > = \max(r, r_0)$$

Einerseits muß also gelten

$$r < = \min(r, r_0)$$

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l(x') x^l + B_l(x') x^{-(l+1)}) P_l(\cos \gamma)$$

Für  $\vec{x} \parallel \vec{x}'$  muß gelten:

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \begin{cases} \frac{1}{x' - x} = \frac{1}{x'} \frac{1}{1 - \frac{x}{x'}} = \frac{1}{x'} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{x}{x'}\right)^l & \text{für } x < x' \\ \frac{1}{x - x'} = \frac{1}{x} \frac{1}{1 - \frac{x'}{x}} = \frac{1}{x} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{x'}{x}\right)^l & \text{für } x > x' \end{cases}$$

→

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \left( \varrho(x' - x) \frac{x^l}{x'^{l+1}} + \varrho(x - x') \frac{x'^l}{x^{l+1}} \right) P_l(\cos \gamma)$$

Andererseits lautet die allgemeine Entwicklung in Kugelkoordinaten:

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \sum_{\substack{l, l' \\ m, m'}} A_{l, m, m'}(x, x') Y_{l, m}^*(\vartheta', \varphi') Y_{l, m}(\vartheta, \varphi)$$

Die Verwendung der komplex konjugierten Kugelflächenfunktionen, welche auch ein vollständiges Orthonormalsystem bilden, wird sich bei der Verwendung der Vollständigkeitsrelation als günstig erweisen.

Wir setzen aus (nutze Ergebnisse aus Kapitel 1 & Vollständigkeit):

$$\begin{aligned} \Delta \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} &= \sum_{\substack{\ell, \ell' \\ m, m'}} \left( \frac{1}{x} \frac{\partial^2}{\partial x^2} x - \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} \right) A_{\ell' m m'}(x, x') Y_{\ell' m'}^*(\vartheta', \varphi') Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi) \\ &= -4\pi \delta^3(\vec{x}-\vec{x}') = -\frac{4\pi}{x^2} \delta(x-x') \underbrace{\frac{\delta(\vartheta-\vartheta')}{\sin \vartheta}}_{=\delta(\cos \vartheta - \cos \vartheta')} \delta(\varphi-\varphi') \\ &= -\frac{4\pi}{x^2} \delta(x-x') \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}^*(\vartheta', \varphi') Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi) \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich  $\rightarrow$

$$A_{\ell' m m'}(x, x') \equiv A_{\ell m}(x, x') \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'}$$

$$\text{und } \left( \frac{1}{x} \frac{\partial^2}{\partial x^2} x - \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} \right) A_{\ell m}(x, x') = -\frac{4\pi}{x^2} \delta(x-x')$$

$A_{\ell m}$  ist stetig differenzierbar außer für  $x=x'$ , wo sie nur stetig ist, damit bei der zweiten Ableitung die  $\delta$ -Funktion erzeugt werden kann. Darüberhinaus sollte die Funktion für  $x$  oder  $x'$  gegen Null einen endlichen Wert annehmen und für  $x$  oder  $x'$  gegen Unendlich gegen Null gehen.

$\rightarrow$

$$A_{\ell m}(x, x') \equiv A_{\ell}(x, x') = \mathcal{Q}(x'-x) a_{\ell}(x') x^{\ell} + \mathcal{Q}(x-x') a_{\ell}(x) \frac{x'^{2\ell+1}}{x^{\ell+1}}$$

Den Koeffizienten  $a_{\ell}$  bestimmen wir durch die Normierung der  $\delta$ -Funktion. Da  $A_{\ell m}(x, x')$  selbst stetig ist, kann in obiger Gleichung die  $\delta$ -Funktion nur durch die zweite Ableitung auf einen „Knick“

in  $A_{lm}(x, x')$  erzeugt werden. Es genügt also, zu betrachten

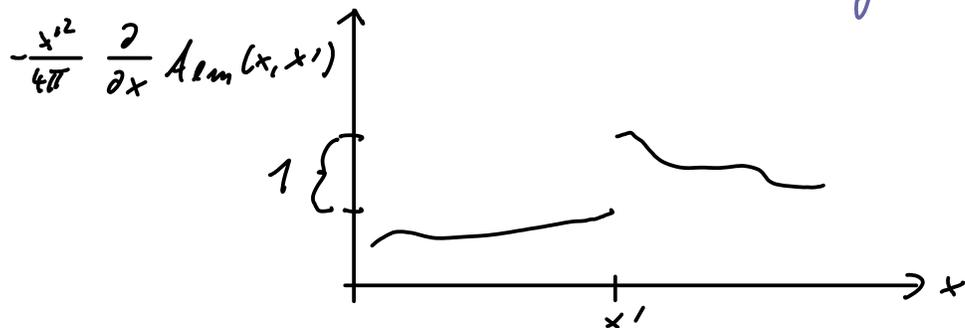
$$\frac{1}{x} \frac{\partial^2}{\partial x^2} x A_{lm}(x, x') = -\frac{4\pi}{x^2} \delta(x, x') + R_1(x, x')$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} A_{lm}(x, x') = -\frac{4\pi}{x^2} \delta(x, x') + R_2(x, x')$$

Dabei ist  $R_1$  eine stetige,  $R_2$  eine endliche Funktion (aber mit Unstetigkeit für  $x=x'$ ).

$$\rightarrow \int dx'' \frac{\partial^2}{\partial x''^2} A_{lm}(x'', x') = -4\pi \int dx'' \left( \frac{1}{x''^2} \delta(x'', x') + R_2(x'', x') \right)$$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial x} A_{lm}(x, x') = -\frac{4\pi}{x'^2} \mathcal{D}(x-x') + \underbrace{R_3(x, x')}_{\text{stetig}}$$



$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow x'} \left\{ -\left( -\frac{x^2}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} A_{lm}(x, x') \right)_{x < x'} + \left( -\frac{x^2}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} A_{lm}(x, x') \right)_{x > x'} \right\} = 1$$

Einsetzen obiger Entwicklung ergibt dann:

$$-\left(-\frac{x^2}{4\pi} a_l(x) \frac{d}{dx} x^l\right) + \left(-\frac{x^2}{4\pi} x^{2l+1} a_l(x) \frac{d}{dx} \frac{1}{x^{2l+1}}\right) = 1$$

→

$$l x^{l+1} + (l+1) x^{l+1} = \frac{4\pi}{a_l(x)} \rightarrow a_l(x) = \frac{4\pi}{2l+1} \frac{1}{x^{l+1}}$$

→

$$A_{lm}(x, x') = \frac{4\pi}{2l+1} \left[ \mathcal{Q}(x'-x) \frac{x^l}{x'^{l+1}} + \mathcal{Q}(x-x') \frac{x'^l}{x^{l+1}} \right]$$

Einsetzen in obige Entwicklung →

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \sum_{l,m} A_{lm}(x, x') Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

$$= \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} \left[ \mathcal{Q}(x'-x) \frac{x^l}{x'^{l+1}} + \mathcal{Q}(x-x') \frac{x'^l}{x^{l+1}} \right] Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

Der Vergleich mit der Entwicklung in Legendrepolynomen zeigt dann die Behauptung.

### 2.7 Green'sche Funktion in Kugelkoordinaten für Randbedingungen auf der Sphäre

Wir können nun mit obiger Methode eine Green'sche Funktion in Kugelkoordinaten für Dirichlet-Randbedingungen bei endlichem Radius  $R$  an Stelle von  $R \rightarrow \infty$  bestimmen (d.h.  $A_{lm}(x, R) = 0$  verlangen).

Andererseits können wir die Entwicklung in Kugelflächenfunktionen aus vorigem Abschnitt direkt auf das Resultat

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \frac{1}{\left| \frac{x'}{R} \vec{x} - \frac{R}{x'} \vec{x}' \right|} \quad (x, x' > R)$$

anwenden.

→

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} \left[ \mathcal{G}(x'-x) \frac{x^l}{x'^{l+1}} + \mathcal{G}(x-x') \frac{x'^l}{x^{l+1}} - \underbrace{\mathcal{G}\left(R - \frac{xx'}{R}\right)}_{\equiv 0, \text{ da } x, x' > R} \frac{\left(\frac{xx'}{R}\right)^l}{R^{l+1}} - \underbrace{\mathcal{G}\left(\frac{xx'}{R} - R\right)}_{\equiv 1} \frac{R^l}{\left(\frac{xx'}{R}\right)^{l+1}} \right]$$

$$* Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

$$= \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} \left[ \mathcal{G}(x'-x) \frac{x^l}{x'^{l+1}} + \mathcal{G}(x-x') \frac{x'^l}{x^{l+1}} - \frac{R^{2l+1}}{(xx')^{l+1}} \right] Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

$$= \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} \left[ \mathcal{G}(x'-x) \frac{1}{x'^{l+1}} \left( x^l - \frac{R^{2l+1}}{x^{l+1}} \right) + \mathcal{G}(x-x') \frac{1}{x^{l+1}} \left( x'^l - \frac{R^{2l+1}}{x'^{l+1}} \right) \right]$$

$$* Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

Dem letzten Ausdruck sehen wir die Symmetrie in  $x \leftrightarrow x'$  an, sowie die Randbedingung  $G(\vec{x}, \vec{x}') = 0$  falls  $x=R$  oder  $x'=R$ .

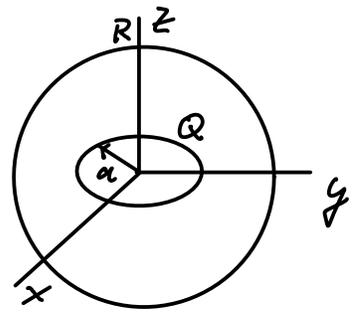
Die Green'sche Funktion für Ladungen innerhalb der Kugel kann auch aus obigem Resultat abgelesen werden:

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} \left[ \mathcal{G}(x'-x) \frac{x^l}{x'^{l+1}} + \mathcal{G}(x-x') \frac{x'^l}{x^{l+1}} - \frac{(xx')^l}{R^{2l+1}} \right] Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

$$= \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} \left[ \mathcal{G}(x'-x) x^l \left( \frac{1}{x'^{l+1}} - \frac{x'^l}{R^{2l+1}} \right) + \mathcal{G}(x-x') x'^l \left( \frac{1}{x^{l+1}} - \frac{x^l}{R^{2l+1}} \right) \right] \quad (x, x' < R)$$

Wiederum sind Symmetrie und Randbedingung an der Kugel manifest, darüberhinaus ist die Lösung regulär im Ursprung.

Beispiel Konzentrischer, geladener (Ladung  $Q$ ) Ring (Radius  $a$ ) in geerdeter Hohlkugel (Radius  $R$ )



→  

$$\rho(\vec{x}') = \frac{Q}{2\pi a^2} \delta(x'-a) \delta(\cos \vartheta')$$

nur  $m=0$  trägt  
 bei wegen azimuthaler Symmetrie

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}) &= \int d^3x' G(\vec{x}, \vec{x}') \rho(\vec{x}') \\ &= \frac{Q}{2\pi a^2} 2\pi \int_0^\pi \sin \vartheta' d\vartheta' \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2l+1} \int_a^R x'^2 dx' \delta(x'-a) \delta(\cos \vartheta') \\ &\quad * \left[ \vartheta(a-x) x^l \left( \frac{1}{a^{l+1}} - \frac{a^l}{R^{2l+1}} \right) + \vartheta(x-a) a^l \left( \frac{1}{x^{l+1}} - \frac{x^l}{R^{2l+1}} \right) \right] \\ &\quad \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\cos \vartheta) P_l(\cos \vartheta') \end{aligned}$$

$$= Q \sum_{l=0}^{\infty} \left[ \vartheta(a-x) x^l \left( \frac{1}{a^{l+1}} - \frac{a^l}{R^{2l+1}} \right) + \vartheta(x-a) a^l \left( \frac{1}{x^{l+1}} - \frac{x^l}{R^{2l+1}} \right) \right] P_l(\cos \vartheta) P_l(0)$$

Eine etwas einfachere Form wird noch erreicht mit

$$P_{2n+1}(0) = 0 \quad \text{und} \quad P_{2n}(0) = \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^n n!}$$

$$n!! = \begin{cases} n \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 & \text{für } n \text{ gerade} \\ n \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1 & \text{für } n \text{ ungerade} \\ 1 & \text{für } n=0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}) &= Q \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \vartheta(a-x) x^{2n} \left( \frac{1}{a^{2n+1}} - \frac{a^{2n}}{R^{4n+1}} \right) + \vartheta(x-a) a^{2n} \left( \frac{1}{x^{2n+1}} - \frac{x^{2n}}{R^{4n+1}} \right) \right] \\ &\quad * \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^n n!} P_{2n}(\cos \vartheta) \end{aligned}$$

Beispiel Gerader, geladener Draht (Ladung  $Q$ , Länge  $2R$ )  
in geerdeter Kugel (Radius  $R$ )

→

$$\varrho(\vec{x}') = \frac{Q}{2R} \frac{1}{2\pi x'^2} [\delta(\cos \vartheta' - 1) + \delta(\cos \vartheta' + 1)]$$

Dabei haben wir angenommen, daß der Draht in  $z$ -Richtung orientiert ist.

$$\int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi} d\cos \vartheta' \int_a^b x'^2 dx' \varrho(\vec{x}') = \frac{Q}{2R} (b-a)$$

Damit ist die Ladungsdichte per Einheitslänge im oberen Halbvolumen konstant (und entsprechend für die untere Hälfte). Wiederum besteht azimutale Symmetrie.

→

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}) &= \frac{Q}{4\pi R} \int_0^R x'^2 dx' \frac{1}{x'^2} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-1}^1 d\cos \vartheta' \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2l+1} \left[ \mathcal{Q}(x^l x) x^l \left( \frac{1}{x^{l+1}} - \frac{x'^l}{R^{2l+1}} \right) + \mathcal{Q}(x-x') x'^l \left( \frac{1}{x^{l+1}} - \frac{x^l}{R^{2l+1}} \right) \right] \\ &\quad * \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\cos \vartheta) P_l(\cos \vartheta') [\delta(\cos \vartheta' - 1) + \delta(\cos \vartheta' + 1)] \\ &= \frac{Q}{2R} \int_0^R dx' \sum_{l=0}^{\infty} \left[ \mathcal{Q}(x^l x) x^l \left( \frac{1}{x^{l+1}} - \frac{x'^l}{R^{2l+1}} \right) + \mathcal{Q}(x-x') x'^l \left( \frac{1}{x^{l+1}} - \frac{x^l}{R^{2l+1}} \right) \right] \\ &\quad * P_l(\cos \vartheta) [P_l(1) + P_l(-1)] \end{aligned}$$

Die ungeraden Summanden verschwinden wegen  $P_l(-1) = (-1)^l$ .

$$\begin{aligned} \vec{I}_1 &= \int_x^R dx' \left( \frac{x^l}{x'^{l+1}} - \frac{x^l x'^l}{R^{2l+1}} \right) = \left[ -\frac{1}{l} \frac{x^l}{x'^l} - \frac{x^l}{l+1} \frac{x'^{l+1}}{R^{2l+1}} \right]_{x'=x}^{x'=R} \\ &= -\frac{1}{l} \frac{x^l}{R^l} + \frac{1}{l} - \frac{1}{l+1} \frac{x^l}{R^l} + \frac{1}{l+1} \frac{x^{2l+1}}{R^{2l+1}} \end{aligned}$$

$$I_2 = \int_0^x dx' \left( \frac{x'^l}{x^{l+1}} - \frac{x'^l x^l}{R^{2l+1}} \right) = \left[ \frac{x'^{l+1}}{(l+1)x^{l+1}} - \frac{1}{l+1} \frac{x'^{l+1} x^l}{R^{2l+1}} \right]_{x'=0}^{x'=x}$$

$$= \frac{1}{l+1} - \frac{1}{l+1} \frac{x^{2l+1}}{R^{2l+1}}$$

$$I_1 + I_2 = -\frac{1}{l} \frac{x^l}{R^l} + \frac{1}{l} - \frac{1}{l+1} \frac{x^l}{R^l} + \frac{1}{l+1} = \frac{2l+1}{l(l+1)} \left( 1 - \left( \frac{x}{R} \right)^l \right)$$

Für  $l=0$  müssen wir eine Definitionslücke schließen:

$$\lim_{l \rightarrow 0} I_1 + I_2 = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{2 \left( 1 - \frac{x^l}{R^l} \right) - \frac{d}{dl} \left( \frac{x}{R} \right)^l}{2l+1} = - \lim_{l \rightarrow 0} \frac{d}{dl} e^{l \log \frac{x}{R}}$$

$$= - \lim_{l \rightarrow 0} \log \frac{x}{R} e^{l \log \frac{x}{R}} = \log \frac{R}{x}$$

$$\longrightarrow \phi(\vec{r}) = \frac{Q}{R} \left[ \log \frac{R}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+1}{2n(2n+1)} \left( 1 - \left( \frac{x}{R} \right)^{2n} \right) P_{2n}(\cos \vartheta) \right]$$

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} \vec{n} \cdot \vec{E} = -\frac{1}{4\pi} \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \phi = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_{r=R}$$

↳ Normale relativ zur Oberfläche zeigt nach innen, entgegengesetzt zur Normalen auf  $\partial V$

$$= -\frac{Q}{4\pi R^2} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+1}{2n+1} P_{2n}(\cos \vartheta) \right]$$

Da die Legendre-Polynome  $P_{2n}$  orthogonal zu  $P_0 \equiv 1$  sind, tragen sie zur induzierten Gesamtladung nicht bei. Diese ist somit wie erwartet  $-Q$ .

## 2.8 Entwicklung Green'scher Funktionen nach Eigenfunktionen

Die quadratintegrablen Funktionen mit dem Skalarprodukt  $\int d^3x \psi^*(x) \varphi(x)$  bilden einen Vektorraum. In diesem kann der Laplaceoperator als ein hermitescher Operator aufgefaßt werden. Die Green'sche Funktion ist dann sozusagen das Inverse dieses Operators, wobei aber die Lösungen der Laplacegleichung als Nullmoden gesondert zu behandeln sind.

Betrachte Operator  $\Delta + f(\vec{x})$

→ Lösungen zu  $\Delta \psi_n(\vec{x}) + f(\vec{x}) \psi_n(\vec{x}) = -\lambda_n \psi_n(\vec{x})$  sind Eigenfunktionen zum Eigenwert  $\lambda_n$ .  $\{\lambda_n\}$  kann diskret, kontinuierlich oder beides gleichzeitig sein.

$$\text{Orthonormalität: } \int d^3x \psi_m^*(\vec{x}) \psi_n(\vec{x}) = \delta_{mn}$$

Wir nehmen auch an, daß die Eigenfunktionen einen vollständigen Satz bilden.

Suche nun Green'sche Funktion als Lösung zu

$$\Delta_x G(\vec{x}, \vec{x}') + [f(\vec{x}) + \lambda] G(\vec{x}, \vec{x}') = -4\pi \delta^3(\vec{x} - \vec{x}')$$

wobei  $\lambda$  hier als ein Parameter behandelt wird.

Sofern die Green'sche Funktion dieselben Randbedingungen wie die Eigenfunktionen erfüllt, können wir entwickeln:

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \sum_n a_n(\vec{x}') \psi_n(\vec{x})$$

→

$$\sum_n a_n(\vec{x}') (1 - \lambda_n) \psi_n(\vec{x}) = -4\pi \delta^3(\vec{x} - \vec{x}')$$

Multipliziere dies mit  $\psi_m^*(\vec{x})$  und integriere über  $d^3x$

$$\rightarrow \alpha_m(\vec{x}') = 4\pi \frac{\psi_m^*(\vec{x}')}{\lambda_m - 1}$$

$$\rightarrow G(\vec{x}, \vec{x}') = 4\pi \sum_n \frac{\psi_n^*(\vec{x}') \psi_n(\vec{x})}{\lambda_n - 1}$$

Für kontinuierliche Spektren wird aus dem Summenzeichen ein Integral.

Einfachstes Beispiel: Der Poisson-Gleichung ist die Eigenwertgleichung  $(\Delta + k^2) \psi_{\vec{k}}(\vec{x}) = 0$  zugeordnet, mit den kontinuierlichen Eigenwerten  $k^2$  und der Eigenfunktionen  $\psi_{\vec{k}}(\vec{x}) = e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}$

$$\text{Orthonormalität: } \int d^3x \psi_{\vec{k}}^*(\vec{x}) \psi_{\vec{k}'}(\vec{x}) = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{k}')$$

$$\rightarrow \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = 4\pi \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')}}{k^2}$$

Vgl. direkte Berechnung des Fourierintegrals:

$$\int d^3x e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}'} \int d^3x e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

$$= e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}'} 2\pi \int_0^\infty r^2 dr \int_{-1}^1 d\cos\vartheta e^{-ikr \cos\vartheta - \varepsilon r} \frac{1}{r}$$

$\varepsilon > 0$ , infinitesimal

$$\hookrightarrow r = |\vec{x} - \vec{x}'|$$

$$\vartheta = \angle(\vec{x} - \vec{x}', \vec{k})$$

$$= 2\pi e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}'} \int_0^\infty r dr \frac{1}{-ikr} [e^{-ikr} - e^{ikr}] e^{-\varepsilon r}$$

$$= 2\pi e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}'} \int_0^\infty dr \frac{2 \sin kr}{k} e^{-\varepsilon r} = 4\pi \frac{e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}'}}{k^2}$$

Als ein weiteres Beispiel betrachten wir das Dirichletproblem in einem rechtwinkligen Kasten mit den Begrenzungsflächen  $x=y=z=0$ ,  $x=a$ ,  $y=b$ ,  $z=c$ .

→ zugehörige Eigenwertgleichung:

$$(\Delta + k_{lmn}^2) \psi_{lmn}(x, y, z) = 0$$

wobei die Eigenfunktionen auf den Randflächen verschwinden →

$$\psi_{lmn}(x, y, z) = \sqrt{\frac{8}{abc}} \sin \frac{l\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} \sin \frac{n\pi z}{c}$$

$$k_{lmn}^2 = \pi^2 \left( \frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2} \right), \quad l, m, n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{diskrete Eigenwerte})$$

→

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{32}{\pi abc} \sum_{l, m, n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{l\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} \sin \frac{n\pi z}{c} \sin \frac{l\pi x'}{a} \sin \frac{m\pi y'}{b} \sin \frac{n\pi z'}{c}}{\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2}}$$

## 2.9 Multipolentwicklung

Wir nehmen an, ein Potential werde von einer Ladungsdichte  $\rho(\vec{x}')$ , welche nur innerhalb der Kugel vom Radius  $R$  nichtverschwindend ist, erzeugt.

→ für  $|\vec{x}| > R$  löst  $\phi(\vec{x})$  die Laplacegleichung, und wir können entwickeln:

$$\phi(\vec{x}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} q_{lm} \frac{Y_{lm}(\vartheta, \varphi)}{x^{l+1}} \quad (\text{Multipolentwicklung})$$

Dabei heißt der  $l=0$ -Term Monopol,  $l=1$  Dipol,  $l=2$  Quadrupol usw.

Andererseits ist die Lösung gegeben durch

$$(x \equiv |\vec{x}|, \quad x' \equiv |\vec{x}'|)$$

$$\phi(\vec{x}) = \int d^3x' \frac{e(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = 4\pi \sum_{l,m} \frac{1}{2^{l+1}} \int d^3x' x'^l Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') e(\vec{x}') \frac{Y_{lm}(\vartheta, \varphi)}{x^{l+1}}$$

$\uparrow$   
 $x' < x$   
 für  $e(\vec{x}') \neq 0$

$$\rightarrow q_{lm} = \int d^3x' Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') x'^l e(\vec{x}') \quad (\text{Multipolmomente})$$

Zum Vergleich entwickeln wir auch um  $\vec{x}' = \vec{0}$  in kartesischen Koordinaten:

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-\vec{x}' \cdot \vec{\nabla}_x)^n \frac{1}{|\vec{x}|} = \frac{1}{x} - \vec{x}' \cdot \vec{\nabla}_x \frac{1}{x} + \frac{1}{2} (\vec{x}' \cdot \vec{\nabla}_x)^2 \frac{1}{x} + \dots$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{x} = -\frac{x_i}{x^3}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{x} = -\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{x_i}{x^3} = -\frac{\delta_{ij}}{x^3} + 3 \frac{x_i x_j}{x^5} = \frac{3x_i x_j - \delta_{ij} x^2}{x^5}$$

$$x'_i x'_j \frac{3x_i x_j - \delta_{ij} x^2}{x^5} = \frac{1}{x^5} x_i x_j (3x'_i x'_j - \delta_{ij} x'^2)$$

→

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{x} \underbrace{\int d^3x' e(\vec{x}')}_{\text{Monopol } q} + \frac{x_i}{x^3} \underbrace{\int d^3x' x'_i e(\vec{x}')}_{\text{Dipol } \vec{p}} + \frac{1}{2} \frac{x_i x_j}{x^5} \underbrace{\int d^3x' (3x'_i x'_j - \delta_{ij} x'^2) e(\vec{x}')}_{\text{Quadrupoltensor } Q_{ij}} + \dots$$

Allgemein bezeichnet man Objekte mit dem gleichen Transformationsverhalten unter Rotationen wie  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  als sphärische Tensoren  $l$ -ter Stufe. Diese Klasse ist allgemeiner als die hier definierten kartesischen Multipolensoren, schließt diese aber mit ein.

Elektrisches Feld:

$$E_x^{lm} = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{4\pi}{2^{l+1}} q_{lm} \frac{Y_{lm}(\vartheta, \varphi)}{x^{l+1}} = 4\pi \frac{l+1}{2^{l+1}} q_{lm} \frac{Y_{lm}(\vartheta, \varphi)}{x^{l+2}}$$

$$E_{\vartheta}^{lm} = -\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \frac{4\pi}{2l+1} q_{lm} \frac{Y_{lm}(\vartheta, \varphi)}{x^{l+1}} = -4\pi \frac{1}{2l+1} q_{lm} \frac{\partial Y_{lm}(\vartheta, \varphi)}{x^{l+2}}$$

$$E_{\varphi}^{lm} = -\frac{1}{x \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{4\pi}{2l+1} q_{lm} \frac{Y_{lm}(\vartheta, \varphi)}{x^{l+1}} = -4\pi \frac{1}{2l+1} q_{lm} \frac{i m Y_{lm}(\vartheta, \varphi)}{x^{l+2}}$$

Beispiel: Dipol entlang der z-Achse.  $Y_{10}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \vartheta$

$$P_3 \equiv p \equiv |\vec{p}| = \int d^3 x' x'_3 \rho(\vec{x}') = \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-1}^1 d\cos \vartheta' \int_0^{\infty} x'^3 dx' \cos \vartheta' \rho(\vec{x}')$$

$$q_{10} = \int d^3 x' \sqrt{\frac{3}{4\pi}} (x')^1 \cos \vartheta' \rho(\vec{x}')$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-1}^1 d\cos \vartheta' \int_0^{\infty} x'^3 dx' \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \vartheta' \rho(\vec{x}')$$

$$\rightarrow q_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} P_3$$

$$\rightarrow E_{\varphi}^{10} = 0,$$

$$E_{\vartheta}^{10} = 4\pi \frac{1}{3} \frac{3}{4\pi} p \frac{\sin \vartheta}{x^3} = \frac{p \sin \vartheta}{x^3},$$

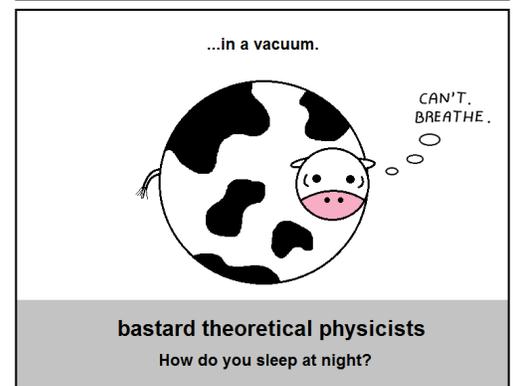
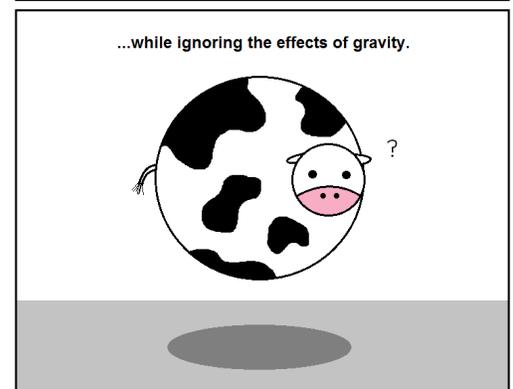
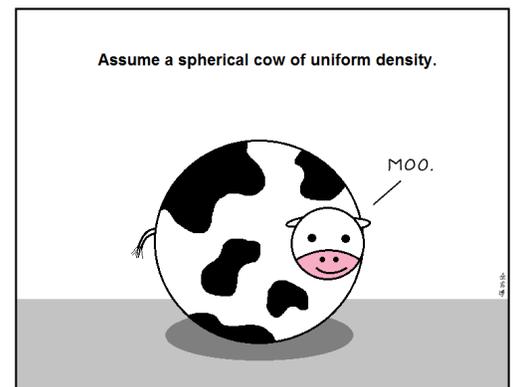
$$E_x^{10} = -4\pi \frac{1}{3} \frac{3}{4\pi} p \frac{\cos \vartheta}{x^3} = -\frac{2p \cos \vartheta}{x^3}$$

Kurzweilisch:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} p \frac{x_3}{x^3} = -p \frac{\vec{u}_3}{x^3} + 3p \frac{\vec{x} x_3}{x^5}$$

$\rightarrow$  allgemeine Richtung  $\vec{p}$ :

$$\vec{E} = \frac{3\vec{x}(\vec{p} \cdot \vec{x})}{x^5} - \frac{\vec{p}}{x^3}$$



Monopoldückerung  
(abstrusegoose.com)

## Energie einer Ladungsverteilung im externen Feld

$$W = \int d^3x \phi(\vec{x}) \rho(\vec{x})$$

Entwickle um einen zweckmäßig gewählten Koordinatenursprung:

$$\phi(\vec{x}) = \phi(0) + \vec{x} \cdot \vec{\nabla} \phi(0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} x_i x_j \frac{\partial^2 \phi(0)}{\partial x_i \partial x_j} + \dots$$

$$= \phi(0) - \vec{x} \cdot \vec{E}(0) - \frac{1}{2} \sum_{i,j} x_i x_j \frac{\partial E_j(0)}{\partial x_i} + \dots$$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$  fürs externe Feld

$$= \phi(0) - \vec{x} \cdot \vec{E}(0) - \frac{1}{6} \sum_{i,j} (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) \frac{\partial E_j}{\partial x_i} + \dots$$

→

$$W = q \phi(0) - \vec{p} \cdot \vec{E}(0) - \frac{1}{6} \sum_{i,j} Q_{ij} \frac{\partial E_j}{\partial x_i} + \dots$$

→ Die Energie der Ladung hängt ab vom Potential, des Dipolmoments vom Feld und des Quadrupolmoments vom Feldgradienten.

Beispiel Dipol-Dipol-Wechselwirkung (Abstand  $\vec{x}$ )

$$W_{12} = W_{21} = -\vec{p}_1 \cdot \left( \frac{3\vec{x}(\vec{p}_2 \cdot \vec{x})}{x^5} - \frac{\vec{p}_2}{x^3} \right) = -\frac{3(\vec{p}_1 \cdot \vec{x})(\vec{p}_2 \cdot \vec{x})}{x^5} + \frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2}{x^3}$$