

Elektrodynamik

1. Vorbereitungen

1.1 Einleitung

Das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{x}, t)$ und das magnetische Feld $\vec{B}(\vec{x}, t)$ üben auf eine Ladung q , welche sich am Ort $\vec{x}(t)$ aufhält und sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}(t) = \dot{\vec{x}}(t)$ bewegt, folgende Kraft aus:

$$\vec{F}(\vec{x}(t), t) = q \vec{E}(\vec{x}(t), t) + q \frac{\vec{v}(t)}{c} \times \vec{B}(\vec{x}(t), t)$$

mit c : Lichtgeschwindigkeit

Die Bewegungsgleichungen der Felder sind die Maxwellgleichungen (1864)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi \rho \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

Dabei ist $\rho(\vec{x}, t)$ die Ladungsdichte und $\vec{j}(\vec{x}, t)$ die Stromdichte. Wir haben hier die Argumente $\vec{x}, t$ unterdrückt und benutzen das Gaußsche Einheiten-System.

Die hier notierten Gleichungen beschreiben nicht allein die Wechselwirkungen zwischen Ladungen. Maxwell fand auch Wellenlösungen, stellte die Koinkidenz von deren Ausbreitungsgeschwindigkeit

mit der experimentell gefundenen Lichtgeschwindigkeit fest und erkannte somit, daß Licht ein elektromagnetisches Phänomen ist.

Die Elektrodynamik bildet somit zusammen mit der — ggf. quantisierten — Mechanik die Grundlage der Beschreibung eines wichtigen Teils der Naturphänomene (also neben direkt erkenntlichen elektrischen und magnetischen auch von Strahlung und chemischen Bindungen).

Die Bedeutung von Maxwells Gleichungen reicht jedoch noch weiter. Sie sind forminvariant nicht unter den Galilei-Transformationen der klassischen Mechanik sondern unter den Lorentz-Transformationen und führen so zur Relativitätstheorie.

Desweiteren sind diese Gleichungen das einfachste Beispiel einer Eichtheorie. In der zweiten Hälfte des vergangenen Jahrhunderts wurde dann entdeckt, daß sowohl die starken (Bindung von Protonen und Neutronen, ...) als auch schwachen (β -Zerfall, Myonen-Zerfall, ...) Wechselwirkungen zu dieser Kategorie gehören, und daß die schwachen Wechselwirkungen sich mit dem Elektromagnetismus vereinheitlichen lassen (Higgs-Mechanismus, Glashow-Weinberg-Salam Modell).

1.2 Tensorfelder

Rotationen sind zunächst durch ihre Wirkung auf einen Vektor definiert: $\vec{x} \xrightarrow{R} \vec{x}'$

Die Rotation ist eine lineare Transformation, läßt sich also durch eine Matrix darstellen: $\vec{x} \mapsto \vec{x}' = R \vec{x}$

Darüberhinaus erhält sie die Länge des Vektoren:

$$\vec{x} \cdot \vec{x} \stackrel{!}{=} (R \vec{x}) \cdot (R \vec{x}) = (\vec{x})^t R^t R \vec{x} \Rightarrow R^t R = \mathbb{1}$$

R ist also eine orthogonale Matrix (im kartesischen Koordinatensystem)

Wir können um die drei Raumachsen drehen mit:

$$R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad R_y(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Allgemeine Drehungen durch hintereinander ausführen $\longrightarrow$

$3 * 2 * 2 = 12$ mögliche Reihenfolgen (nicht zwei gleiche hintereinander)

Standardkonvention: $R(\alpha, \beta, \gamma) = R_z(\gamma) R_x(\beta) R_z(\alpha)$ (Eulersche Winkel)

Summenkonvention:

Man schreibt z.B.

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^3 x_i y_i \equiv x_i y_i$$

$$\vec{x}' = R \vec{x} \iff x'_i = \sum_{j=1}^3 R_{ij} x_j \equiv R_{ij} x_j$$

D.h. über paare gleicher Indizes wird summiert und das Summenzeichen dabei unterdrückt.

Neben den Vektoren kategorisiert man Größen folgendermaßen nach ihren Transformationseigenschaften:

Eine Größe S heißt (kartesischer) Skalar, wenn sie sich bei Rotationen nicht ändert: $S' = S$

Ein Satz von Größen $v_i, i=1,2,3$ heißt (kartesischer) Vektor, falls er sich unter Rotationen folgendermaßen transformiert: $v_i' = R_{ij} v_j$ (definierende Eigenschaft der Rotationen)

Ein Satz von Größen $T_{i_1 i_2 \dots i_n}, i_1, i_2, \dots, i_n = 1, 2, 3$ heißt (kartesischer) Tensor der Stufe n , falls

$$T'_{i_1 i_2 \dots i_n} = R_{i_1 j_1} R_{i_2 j_2} \dots R_{i_n j_n} T_{j_1 j_2 \dots j_n}$$

Bemerkungen

* Die Geschwindigkeit ist ein Vektor:

$$v_i' = \frac{dx_i'}{dt} = \frac{d}{dt} (R_{ij} x_j) = R_{ij} \frac{dx_j}{dt} = R_{ij} v_j$$

* Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist ein Skalar (Rotationen erhalten Längen & Winkel):

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_i' w_i' = R_{ij} v_j R_{ik} w_k = v_j (R^T R)_{jk} w_i$$

$$= v_j \underbrace{\delta_{ji}}_{= \mathbb{1}_{ji}} w_i = v_i w_i = \vec{v} \cdot \vec{w}$$

* $a S_{i_1 \dots i_n} + b T_{i_1 \dots i_n}$ mit S, T Tensoren n -ter Stufe und $a, b \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) ist Tensor der Stufe n .

* $S_{i_1 \dots i_n} T_{j_1 \dots j_m}$ ist ein Tensor der Stufe $n+m$.

* $S_{i_1 \dots i_n k_1 \dots k_r} = U_{i_1 \dots i_n j_1 \dots j_m} T_{j_1 \dots j_m k_1 \dots k_r}$
Falls S Tensor der Stufe $n+r$ und U ist Tensor der Stufe $n+m$ & T Tensor der Stufe $m+r$ $\Rightarrow$ Stufe $n+m$

(Kontraktion)

(Gilt auch für Permutationen der Indizes)

Pseudotensoren

$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ führt zu Spiegelungen ($\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$),

und es gilt $\det P = -1$, P kann mit eigentlichen Drehungen verknüpft werden, i.e. $R^{(2)} = R^{(1)} P$.

Dann ist $T_{i_1 i_2 \dots i_n}$ ein Pseudotensor, wenn folgende Transformations Eigenschaft gilt:

$$T'_{i_1 i_2 \dots i_n} = \det R * R_{i_1 j_1} R_{i_2 j_2} \dots R_{i_n j_n} T_{j_1 j_2 \dots j_n}$$

Als Spezialfälle ergeben sich Pseudoskalar und Pseudovektor als Pseudotensoren der Stufe 0 bzw. 1.

Invariante Tensoren

Das Kroneckersymbol

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i=j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

ist ein invarianter Tensor, da es in sich selbst transformiert:

$$\delta'_{ij} = R_{ik} R_{jl} \delta_{kl} = R_{ik} R_{jk} = R_{ik} R_{kj}^T = (R R^T)_{ij} = \delta_{ij}$$

Bemerkung

Wir können das Skalarprodukt folgendermaßen schreiben:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \underbrace{x_i}_{\substack{\text{Tensor} \\ \text{2. Stufe}}} \underbrace{y_j}_{\substack{\text{Tensor} \\ \text{2. Stufe}}} \delta_{ij}$$

Nach obiger Regel für Kontraktionen ist das Resultat ein Tensor nullter Stufe, also ein Skalar.

Das Levi-Civita-Symbol

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{für } (ijk) \text{ gerade Permutation von } (123) \\ -1 & \text{für } (ijk) \text{ ungerade Permutation von } (123) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

→

$$\varepsilon'_{ijk} = \det R \ R_{ir} \ R_{js} \ R_{kt} \ \varepsilon_{rst} = \det R \ \varepsilon_{ijk} \ \det R = \varepsilon_{ijk}$$

Man nennt ε_{ijk} auch den total antisymmetrischen Tensor.

Wir können den ε -Tensor verwenden zur Definition des Kreuzprodukts: $(\vec{x} \times \vec{y})_i = \varepsilon_{ikj} x_k y_j$

Bemerkung:

Sind $\vec{x}, \vec{y}$ Vektoren, dann ist $\vec{x} \times \vec{y}$ ein Pseudovektor.

Pseudotensor Tensor
3. Stufe 2. Stufe

$$\varepsilon_{ikj} x_k y_j$$

Pseudotensor 1. Stufe

$\equiv$ Pseudovektor

Ist dazu $\vec{z}$ ein weiterer Vektor, dann ist $\vec{z} \cdot (\vec{x} \times \vec{y})$ ein Pseudoskalar (Spatprodukt).

Nützliche Identitäten

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km} \quad (\text{Grassmann-Identität})$$

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijn} = 2 \delta_{kn}$$

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk} = 6$$

Man kann diese anhand der verschiedenen Spezialfälle leicht nachweisen.

Beispiel: BAC-minus-CAB Theorem

$$\begin{aligned} [\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})]_i &= \varepsilon_{ijk} a_j \varepsilon_{klm} b_l c_m = \varepsilon_{kij} a_j \varepsilon_{klm} b_l c_m \\ &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) a_j b_l c_m \\ &= [\vec{b} (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} (\vec{a} \cdot \vec{b})]_i \end{aligned}$$

Beispiel: Lagrange-Identität

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) &= \varepsilon_{ijk} a_j b_k \varepsilon_{ilm} c_l d_m \\ &= (\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}) a_j b_k c_l d_m \\ &= \vec{a} \cdot \vec{c} \vec{b} \cdot \vec{d} - \vec{a} \cdot \vec{d} \vec{b} \cdot \vec{c} \end{aligned}$$

Tensorfelder

Ein Satz von Funktionen $T_{i_1 i_2 \dots i_n}(x_k)$ heißt Tensorfeld (der Stufe n), falls unter (aktiven) Rotationen gilt:

$$T'_{i_1 \dots i_n}(x'_k) = R_{i_1 j_1} \dots R_{i_n j_n} T_{j_1 \dots j_n}(x_k)$$

d.h. das Ortsargument transformiert mit.

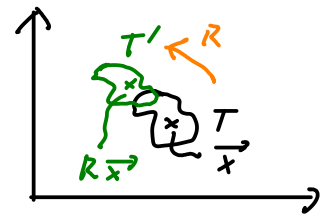
Wegen $x_k = [R^{-1}]_{kl} x'_l$ kann man auch schreiben

$$T'_{i_1 \dots i_n}(x_k) = R_{i_1 j_1} \dots R_{i_n j_n} T_{j_1 \dots j_n}([R^{-1}x])_k$$

Betrachte nun die partielle Ableitung

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'_k} &= \frac{\partial x_l}{\partial x'_k} \frac{\partial}{\partial x_l} = \frac{\partial ([R^{-1}]_{lm} x'_m)}{\partial x'_k} \frac{\partial}{\partial x_l} = R_{lm}^T \frac{\partial x'_m}{\partial x'_k} \frac{\partial}{\partial x_l} \\ &= R_{ml} \delta_{mk} \frac{\partial}{\partial x_l} = R_{kl} \frac{\partial}{\partial x_l} \end{aligned}$$

→ Die partielle Ableitung transformiert also wie ein Vektor.



Damit folgt:

Ist $T_{i_1 \dots i_n}$ ein Tensorfeld der Stufe n , dann ist $\frac{\partial}{\partial x_k} T_{i_1 \dots i_n}$ ein Tensorfeld der Stufe $n+1$.

Beweis:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'_k} T'_{i_1 \dots i_n}(x'_k) &= R_{kl} \frac{\partial}{\partial x_l} (R_{i_1 j_1} \dots R_{i_n j_n} T_{j_1 \dots j_n}(x_l)) \\ &= R_{kl} R_{i_1 j_1} \dots R_{i_n j_n} \frac{\partial}{\partial x_l} T_{j_1 \dots j_n}(x_l) \end{aligned}$$

Den Vektor der partiellen Ableitungen nennen wir Gradient und stellen diesen durch den Nabla-Operator dar:

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

Divergenz (oder Quelledichte) eines Vektorfeldes $\vec{A}$: $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$

Rotation (oder Wirbeldichte): $\vec{\nabla} \times \vec{A}$

Die Begriffe der Quell- und Wirbeldichte erklären sich mit der Betrachtung der Integralsätze der Vektoranalysis.

Bemerkungen

Wirbelfelder sind quellenfrei: $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A} = \epsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k = 0$

Gradientenfelder sind wirbelfrei:

$$[\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \phi]_i = \epsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \phi = 0$$

Dies gilt jeweils, da

$$\epsilon_{ijk} u_j v_k = \frac{1}{2} (\epsilon_{ijk} u_j v_k - \epsilon_{ijk} v_j u_k) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{für } \vec{u} = \vec{v}}}{=} 0$$

Tensoren eignen sich also zur mathematischen Darstellung physikalischer Größen. Sie ändern sich daher unter Drehungen in bestimmter Weise.

Beispiele:

Skalar: Arbeit $W = \int d\vec{s} \cdot \vec{F}$, Masse m , ...

Vektor: Ort $\vec{x}$, Impuls $\vec{p}$, Kraft $\vec{F}$, elektrisches Feld $\vec{E}$

Pseudovektor: Drehimpuls $\vec{L}$, Magnetische Flussdichte $\vec{B}$, ...

Pseudoskalar: Magnetischer Fluss $\Phi = \int d\vec{a} \cdot \vec{B}$

Tensor: Trägheitstensor Θ_{ij} , Quadrupoltensor Q_{ij} , ...

Tensoren haben keine direkte geometrische Interpretation wie Vektoren, jedoch lässt sich ihr Transformationsverhalten auf die grundlegenden Vektortransformationen zurückführen, z.B.

$$L_i = \Theta_{ij} \omega_j \Leftrightarrow$$

$$L'_i = \Theta'_{ij} \omega'_j \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} R_{ik} L_k &= R_{il} R_{jm} \Theta_{lm} R_{jn} \omega_n = R_{il} \underbrace{[R^t R]_{mn}}_{=\delta_{mn}} \Theta_{lm} \omega_n \\ &= R_{il} \Theta_{lm} \omega_m = R_{il} L_l \end{aligned}$$

Gleichungen physikalischer Gesetze müssen auf beiden Seiten in gleicher Weise transformieren, d.h. wie ein (Pseudo-)Tensor n -ter Stufe. Man sagt, die Gleichungen sind forminvariant oder kovariant.

Beispiele

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Vektor:} & \vec{F} = m \vec{a} & , & \vec{F} = -\vec{\nabla} \phi & , & \vec{F} = q \vec{E} + \frac{q}{c} \underbrace{\vec{v} \times \vec{B}}_{\substack{\text{Vektor} \times \text{Pseudovektor} \\ \text{Vektor}}} \end{array}$$

↑ Skalar
↑ Vektor
↑ Vektor
↑ Skalar
↑ Vektor

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi e \quad (\text{Skalar})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (\text{Pseudovektor})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{Pseudoskalar})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (\text{Vektor})$$

1.3 Integralsätze

Die hier verwendeten Sätze nach Gauß und Stokes in drei Raumdimensionen sind Spezialfälle eines verallgemeinerten Satzes von Stokes. Zur Anschauung lohnt sich aber die Begründung der für die Elektrodynamik relevanten Fälle.

Satz von Gauß

Betrachte den Fluß Φ eines Vektorfeldes $\vec{F}$ durch eine Fläche A . $d\vec{a}$ sei dabei ein Flächenelement in Richtung der Normalen:

$$\Phi = \int_{\vec{x} \in A} d\vec{a} \cdot \vec{F}(\vec{x}) = \int du dv \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right) \cdot \vec{F}(\vec{x})$$

$\uparrow$
 $\vec{x} \equiv \vec{x}(u, v)$

Für eine geschlossene Fläche ∂V um ein Volumen V gilt:

$$\oint_{\partial V} d\vec{a} \cdot \vec{F}(\vec{x}) = \int_V dV \vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\vec{x})$$

(wobei $\vec{x} \in \partial V$ bzw. $\vec{x} \in V$ gilt)

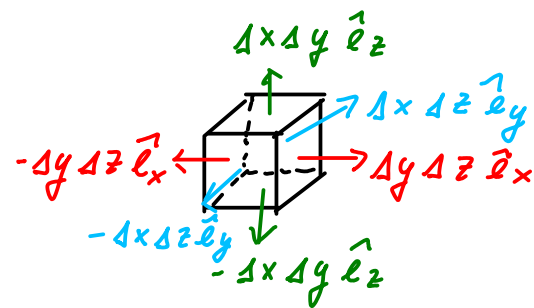
Zur Begründung zerlegen wir V in viele kleine Quader Q_i :

$$\oint_{\partial V} d\vec{a} \cdot \vec{F}(\vec{x}) = \sum_i \oint_{\partial Q_i} d\vec{a} \cdot \vec{F}(\vec{x})$$

Dies ist so möglich, da aufgrund der gegensätzlichen Orientierung von $d\vec{a}$ Beiträge anstoßender Quader einander aufheben und nur die Außenfläche der

Zerlegung beiträgt.

Für einen einzelnen Quader gilt:



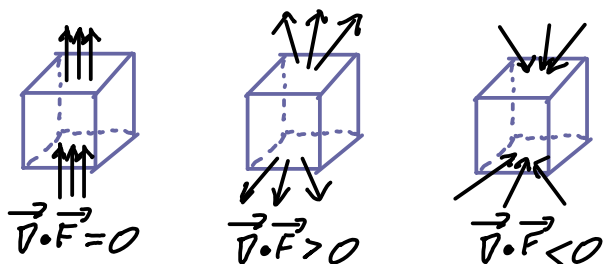
$$\oint_{\partial Q_i} d\vec{a} \cdot \vec{F}(\vec{x}) = \Delta y \Delta z (F_x(x+\Delta x, y, z) - F_x(x, y, z)) \\ + \Delta x \Delta z (F_y(x, y+\Delta y, z) - F_y(x, y, z)) \\ + \Delta x \Delta y (F_z(x, y, z+\Delta z) - F_z(x, y, z)) \\ = \Delta x \Delta y \Delta z \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) = \Delta V \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$$

→

$$\oint_{\partial V} d\vec{a} \cdot \vec{F}(\vec{x}) = \sum_i \oint_{\partial Q_i} d\vec{a} \cdot \vec{F}(\vec{x}) = \sum_i \Delta V_i \vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\vec{x}_i) \\ = \int_V dV \vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\vec{x})$$

wobei dies im Grenzfalle $\Delta V_i \rightarrow 0$ gilt.

Zur Veranschaulichung des Begriffs „Quelldichte“ skizzieren wir:



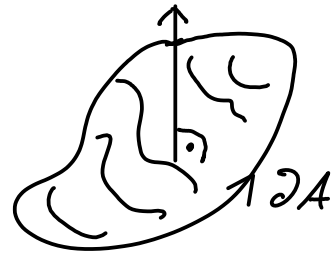
Satz von Stokes

An Stelle des Fluß betrachten wir nun die Zirkulation Γ eines Vektorfeldes entlang einer

geschlossenen, eine Fläche A umschließenden Kurve ∂A :

$$\Gamma = \oint_{x \in \partial A} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{x}) = \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \vec{F}(\vec{x})$$

$\uparrow$ Tangentialvektor
 $\uparrow$ $\vec{x} \equiv \vec{x}(t)$



Das Flächenstück sei entsprechend der rechts-Hand-Regel orientiert.

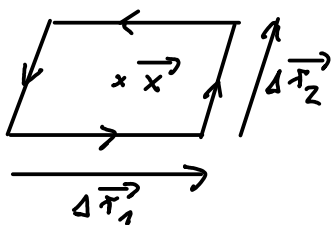
Dann gilt:

$$\oint_{\partial A} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{x}) = \int_A d\vec{a} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{x})$$

Zur Begründung zerlegen wir A nun in viele kleine Parallelogramme, so daß

$$\oint_{\partial A} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{x}) = \sum_i \oint_{\partial P_i} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{x})$$

Dies gilt, da sich aufgrund der entgegengesetzten Orientierung von $d\vec{r}$ die Beiträge benachbarter Kanten einander aufheben.



orientiertes Flächenstück:

$$\Delta \vec{a} = \Delta \vec{r}_1 \times \Delta \vec{r}_2$$

$$\begin{aligned} \oint_{\partial P_i} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{x}) &= \Delta \vec{r}_1 \cdot \left(\vec{F}(\vec{x} - \frac{\Delta \vec{r}_2}{2}) - \vec{F}(\vec{x} + \frac{\Delta \vec{r}_2}{2}) \right) \\ &\quad + \Delta \vec{r}_2 \cdot \left(\vec{F}(\vec{x} + \frac{\Delta \vec{r}_1}{2}) - \vec{F}(\vec{x} - \frac{\Delta \vec{r}_1}{2}) \right) \end{aligned}$$

$$\approx -\Delta \vec{r}_1 \cdot (\Delta \vec{r}_2 \cdot \vec{\nabla} \vec{F}(\vec{x})) + \Delta \vec{r}_2 \cdot (\Delta \vec{r}_1 \cdot \vec{\nabla} \vec{F}(\vec{x}))$$

↑
Taylor

$$= \Delta \vec{r}_1 \cdot \vec{\nabla}_x \Delta \vec{r}_2 \cdot \vec{F}(\vec{x}) - \Delta \vec{r}_2 \cdot \vec{\nabla}_x \Delta \vec{r}_1 \cdot \vec{F}(\vec{x})$$

Lagrange Id.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = \vec{a} \cdot \vec{c} \vec{b} \cdot \vec{d} - \vec{a} \cdot \vec{d} \vec{b} \cdot \vec{c}$$

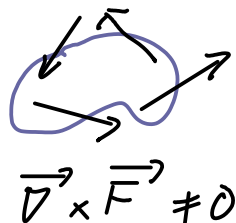
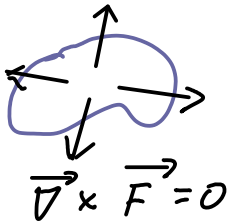
$$= \Delta \vec{r}_1 \times \Delta \vec{r}_2 \cdot \vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{x}) = \Delta \vec{a} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{x})$$

→

$$\oint_{\partial A} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{x}) = \sum_i \oint_{\partial P_i} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{x}) = \sum_i \Delta \vec{a} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{x})$$

$$= \int_A d\vec{a} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{x})$$

Wiederum gilt dies im Grenzfall $\Delta \vec{a} \rightarrow 0$.



Spezialfälle

Gauß'scher Satz für Skalarfelder:

setze $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{u} \phi(\vec{x}) \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \phi$

($\vec{u}$ ein ortsunabhängiger Vektor)

$$\rightarrow \int_V d^3x \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \phi = \int_{\partial V} d\vec{a} \cdot \vec{u} \phi$$

Dies gilt für einen beliebigen Vektor $\vec{u}$ und damit also komponentenweise:

$$\int_V d^3x \vec{\nabla} \phi = \int_{\partial V} d\vec{a} \phi$$

Gauß'scher Satz für ein Kreuzprodukt:

$$\vec{F}(\vec{x}) = \vec{a} \times \vec{b}(\vec{x}) \longrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \epsilon_{ijk} \nabla_i a_j b_k = -\epsilon_{ijk} a_i \nabla_j b_k \\ = -\vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{b})$$

ebenso:

$$\int_{\partial V} d\vec{a} \cdot (\underbrace{\vec{a} \times \vec{b}}_{=\vec{F}}) = -\vec{a} \cdot \int_{\partial V} d\vec{a} \times \vec{b}$$

→

$$\underbrace{\vec{a} \cdot \int_V d^3x \vec{\nabla} \times \vec{b}}_{= - \int_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{F}} = \underbrace{\vec{a} \cdot \int_{\partial V} d\vec{a} \times \vec{b}}_{= - \int_{\partial V} d\vec{a} \cdot \vec{F}} \text{ für beliebige } \vec{a}, \text{ also} \\ \int_V d^3x \vec{\nabla} \times \vec{b} = \int_{\partial V} d\vec{a} \times \vec{b}$$

Green'sche Identitäten

Diese Aussagen ergeben sich als Anwendung des Gauß'schen Satzes und erweisen sich in der Elektrostatik als nützlich.

ϕ, ψ : mindestens zweimal stetig differenzierbare Skalarfelder

V : Volumen mit geschlossener Oberfläche ∂V ,
Flächenelement $d\vec{a}$

Wir definieren: $\vec{F} = \varphi \vec{\nabla} \psi$

und berechnen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = (\vec{\nabla} \varphi) \cdot (\vec{\nabla} \psi) + \varphi \Delta \psi$$

wobei $\Delta = \vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ der Laplaceoperator ist.

Wir schreiben noch $d\vec{a} = \vec{n} da$ mit dem Normalenvektor $\vec{n}$ sowie mit der „Normalenableitung“

$$(\vec{\nabla} \psi) \cdot d\vec{a} = \frac{\partial \psi}{\partial n} da$$

Anwendung des Gauß'schen Satzes ergibt dann die

1. Green'sche Identität:

$$\int_V d^3x (\varphi \Delta \psi + (\vec{\nabla} \varphi) \cdot (\vec{\nabla} \psi)) = \int_{\partial V} da \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n}$$

Vertauschen von φ und ψ und Bilden der Differenz ergibt die

2. Green'sche Identität:

$$\int_V d^3x (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) = \int_{\partial V} da \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)$$

Bemerkung

Mit $\varphi=1$ folgt aus der 1. Green'schen Identität

$$\int_V d^3x \Delta \psi = \int_{\partial V} da \frac{\partial \psi}{\partial n}$$

1.4 Zur δ -Funktion

Die Dirac'sche δ -Funktion ist mathematisch eigentlich als Distribution zu behandeln. Für Anwendungen in der Physik ist es ausreichend, sich auf die vorteilhafte Eigenschaft zu berufen, daß die δ -Funktion unterm Integralzeichen wie eine gewöhnliche Funktion manipuliert werden kann. Dies gilt insbesondere für Variablentransformationen und partielle Integrationen.

Anwendungen sind die Darstellung von Punktladungen und -Massen, gehen aber auch weit darüber hinaus.

In einer Dimension soll gelten:

$$\delta(x) = 0 \text{ für } x \neq 0 \text{ und } \int dx \delta(x) = 1$$

Also erhalten wir

$$\int dx \delta(x-a) f(x) = f(a)$$

Ist $g(x)$ eine stetige Funktion mit nur einfachen Nullstellen x_n , $g(x_n) = 0$, $g'(x_n) \neq 0$ dann gilt

$$\delta(g(x)) = \sum_n \frac{1}{|g'(x_n)|} \delta(x - x_n)$$

Beweis: In einer Umgebung von x_n , schreibe

$$\int_{x_n-a}^{x_n+a} dx \delta(g(x)) f(x) = \int_{\substack{y=g(x) \\ g(x_n-a)}}^{\substack{y=g(x_n+a)}} dy \frac{dx}{dy} \delta(y) f(x(y))$$
$$\frac{dy}{dx} = g'(x)$$

Ist $y(x_n+a) > y(x_n-a) \Rightarrow g'(x_n) > 0$. Falls dagegen $y(x_n+a) < y(x_n-a) \Rightarrow g'(x_n) < 0$. Allerdings ist die Richtung der dy -Integration umzukehren.

In beiden Fällen ist damit durch $|g'(x_n)|$ zu teilen.

Ein wichtiger Spezialfall lautet $\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$.

Die Ableitung der Stufenfunktion $\vartheta(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$ ergibt die δ -Funktion, da

$$\int_{-\infty}^x dx' \delta(x') = \vartheta(x)$$

Ableitung der δ -Funktion:

$$\int_p^q dx \delta'(x-a) f(x) = f(x) \delta(x-a) \Big|_{x=p}^{x=q} - \int_p^q dx \delta(x-a) f'(x) = -f'(a)$$

Für die dreidimensionale δ -Funktion schreiben wir mit

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} : \quad \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0) = \delta(x-x_0) \delta(y-y_0) \delta(z-z_0)$$

In Kugelkoordinaten:

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi$$

$$\vartheta \in [0, \pi]$$

$$y = r \sin \vartheta \sin \varphi$$

$$\varphi \in [0, 2\pi]$$

$$z = r \cos \vartheta$$

und ebenso für r_0

Wir fassen (r, ϑ, φ) als Funktionen von (x, y, z) auf und gehen analog zur eindimensionalen Transformation vor.

Jacobi-Matrix:

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \vartheta, \varphi)} = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & r \cos \vartheta \cos \varphi & -r \sin \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi & r \cos \vartheta \sin \varphi & r \sin \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta & -r \sin \vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det J = r^2 \sin \vartheta$$

Wir können die Abbildung $(r, \varrho, \varphi) \mapsto \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ analog zu $x \mapsto y(x) = g(x)$ im eindimensionalen Fall auffassen, wobei dann $|g'(x)| = \left| \frac{dy}{dx} \right|$ die Entsprechung $\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varrho, \varphi)} \right| = \det f$ hat.

$$\rightarrow \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{1}{r_0^2 \sin \varrho_0} \delta(r - r_0) \delta(\varrho - \varrho_0) \delta(\varphi - \varphi_0)$$

Im Integrationsmaß ist wiederum die Jacobi determinante zu berücksichtigen, so daß gilt:

$$\begin{aligned} \int d^3r \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0) f(\vec{r}) &= f(\vec{r}_0) = \int d^3r \frac{1}{r_0^2 \sin \varrho_0} \delta(r - r_0) \delta(\varrho - \varrho_0) \delta(\varphi - \varphi_0) f(\vec{r}) \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \varrho d\varrho \int_0^\infty r^2 dr \frac{1}{r_0^2 \sin \varrho_0} \delta(r - r_0) \delta(\varrho - \varrho_0) \delta(\varphi - \varphi_0) f(\vec{r}) = f(\vec{r}_0) \end{aligned}$$

Die δ -Funktion kann auch als Grenzfall von Folgen stetiger Funktionen erhalten werden. Zum Beispiel gilt für die Gaußfunktion

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}},$$

daß

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx g(x) = 1$$

und daß $g(x)$ für $x \neq 0$ für $\sigma \rightarrow 0$ beliebig nahe nach Null geht.

Ein weiteres in der Physik wichtiges Beispiel ist die Lorentzkurve

$$L_\varepsilon(x-a) = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{(x-a)^2 + \varepsilon^2}$$

für die gilt

$$\delta(x-a) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} L_\varepsilon(x-a)$$

Wir zeigen nun noch die wichtige Identität

$$\delta(\vec{x}-\vec{x}') = -\frac{1}{4\pi} \Delta \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

Es ist ohne Beschränkung der Allgemeinheit erlaubt, durch Verschieben des Koordinatenursprungs $\vec{x}'=0$ zu wählen. Für $\vec{x}' \neq 0$ erhalten wir:

$$\Delta \frac{1}{|\vec{x}|} = -\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} = \frac{-3}{|\vec{x}|^3} + 3 \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^5} \cdot \vec{x} = 0 \quad (|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2})$$

Für $\vec{x}'=0$ gibt es allerdings noch einen singulären Anteil, welchen wir durch sein Verhalten unterm Integral charakterisieren:

$$\int_V d^3x \Delta \frac{1}{|\vec{x}|} = \int_V da \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|\vec{x}|} = \int_{\partial V} d\vec{a} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x}|} = - \int_{\partial V} d\vec{a} \cdot \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}$$

Da der Integrand des Volumenintegrals nur im Ursprung verschieden von Null ist, können wir V als eine Kugel mit Radius R wählen, ohne den Wert des Integrals zu ändern.

$$\rightarrow - \int_{\partial V} da \frac{1}{R^2} = -4\pi R^2 \frac{1}{R^2} = -4\pi$$

Insgesamt gilt also

$$\Delta \frac{1}{|\vec{x}|} = 0 \quad \text{für } \vec{x} \neq 0 \quad \text{und} \quad \int d^3x \Delta \left(-\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{x}|} \right) = 1$$

d.h. wir finden die definierenden Eigenschaften der δ -Funktion.

1.5 Helmholtz'scher Zerlegungs- und Eindeutigkeitssatz

Sei $\vec{F}(\vec{x})$ ein Vektorfeld, welches im Unendlichen hinreichend schnell gegen Null strebt. Dann gibt es eine eindeutige Zerlegung in

$$\vec{F} = \vec{u} + \vec{v} \quad \text{mit} \quad \vec{u} = \vec{\nabla} \phi \quad \text{und} \quad \vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{V},$$

wobei ϕ ein Skalarfeld und $\vec{V}$ ein Vektorfeld ist. Damit ist $\vec{u}$ rotations- und $\vec{v}$ divergenzfrei.

Zum Beweis der Zerlegung zeigen wir, daß wir wählen können:

$$\phi(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{F}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

$$\vec{V}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{F}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Wir bemerken noch, daß

$$\begin{aligned} [\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{u}]_i &= \underbrace{\epsilon_{ijk}}_{=\epsilon_{kij}} \frac{\partial}{\partial x_j} \epsilon_{klm} \frac{\partial}{\partial x_l} u_m \\ &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_l} u_m \\ &= [\vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} - \Delta \vec{u}]_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \int d^3x' \frac{\vec{F}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\ &= \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla}_x \int d^3x' \vec{\nabla}_x \cdot \frac{\vec{F}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \frac{1}{4\pi} \int d^3x' \Delta_x \frac{\vec{F}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{4\pi} \vec{\nabla}_x \int d^3x' \vec{F}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla}_{x'} \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} + \int d^3x' \delta(\vec{x}-\vec{x}') \vec{F}(\vec{x}') \\
&= \vec{F}(\vec{x}) - \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla}_x \int d^3x' \vec{\nabla}_{x'} \cdot \vec{F}(\vec{x}') \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} + \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla}_x \int d^3x' \frac{\vec{\nabla}_{x'} \cdot \vec{F}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \\
&= \vec{F}(\vec{x}) - \underbrace{\vec{\nabla} \phi(\vec{x})}_{=\vec{u}(\vec{x})} - \underbrace{\frac{1}{4\pi} \vec{\nabla}_x \int d^3x' \frac{\vec{F}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}}_{\substack{\partial V \rightarrow \infty \\ = 0 \text{ vorausgesetzt } |\vec{F}(\vec{x}')| \text{ fällt schneller} \\ \text{als } \frac{1}{|\vec{x}'|} \text{ für } |\vec{x}'| \rightarrow \infty}}
\end{aligned}$$

Zwischenergebnis: $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{u}(\vec{x}) + \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \int d^3x' \frac{\vec{F}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}_x \times \int d^3x' \frac{\vec{F}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} &= \int d^3x' \vec{F}(\vec{x}') \times \vec{\nabla}_{x'} \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \\
&= - \int d^3x' \vec{\nabla}_{x'} \times \frac{\vec{F}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} + \int d^3x' \frac{\vec{\nabla}_{x'} \times \vec{F}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \\
&= - \int d^3x' \times \frac{\vec{F}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} + \underbrace{4\pi \vec{V}(\vec{x})}_{\substack{\partial V \rightarrow \infty \\ \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \times 4\pi \vec{V}(\vec{x}) = \vec{v}(\vec{x})}}
\end{aligned}$$

Insgesamt folgt damit die Zerlegung.

Die Eindeutigkeit folgt, wenn wir zeigen:

$\vec{F}(\vec{x})$ ist eindeutig festgelegt, wenn für alle Raumpunkte $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ und $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ bekannt sind.

Beweis: Betrachte zwei Felder mit

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F}_1 = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}_2 \quad \text{und} \quad \vec{\nabla} \times \vec{F}_1 = \vec{\nabla} \times \vec{F}_2$$

Definiere $\vec{D}(\vec{x}) = \vec{F}_1(\vec{x}) - \vec{F}_2(\vec{x})$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 \quad \text{und} \quad \vec{\nabla} \times \vec{D} = 0$$

Aufgrund der Rotationsfreiheit können wir schreiben:
 $\vec{D} = \vec{\nabla} \psi$, und zusammen mit der Divergenzfreiheit
 folgt dann $\Delta \psi = 0$.

1. Greensche Identität für $\varphi = \psi$

$$\int_{V \rightarrow \infty} d^3x \underbrace{(\psi \Delta \psi + (\vec{\nabla} \psi) \cdot (\vec{\nabla} \psi))}_{=0} = \int_{\partial V \rightarrow \infty} d\vec{a} \cdot \psi \vec{\nabla} \psi = 0$$

Wobei das Oberflächenintegral für hinreichend stark
 abfallendes ψ verschwindet.

Insgesamt gilt also

$$\int d^3x (\vec{\nabla} \psi)^2 = 0$$

und da der Integrand überall positiv ist auch
 $\vec{D} = \vec{\nabla} \psi = 0$, so daß $\vec{F}_1(\vec{x}) = \vec{F}_2(\vec{x}) \quad \forall \vec{x}$.

Bemerkungen

* Ein rotationsfreies Feld ist damit ein Gradienten-
 feld, weil es sich eindeutig als $\vec{F} = \vec{\nabla} \phi$ schreiben
 läßt.

* Ein divergenzfreies Feld ist ein Rotationsfeld, da
 es sich eindeutig als $\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{V}$ schreiben läßt.

* Wir bezeichnen $\phi(\vec{x})$ als Skalarpotential und
 $\vec{V}(\vec{x})$ als Vektorpotential von $\vec{F}(\vec{x})$. Diese erfüllen die
 Gleichungen

$$\Delta \phi = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \quad \text{und} \quad \Delta \vec{V} = -4\pi * \frac{1}{4\pi} \int d^3x' (\vec{\nabla}_{x'} \times \vec{F}(\vec{x}')) \delta(\vec{x} - \vec{x}') = -\vec{\nabla} \times \vec{F}$$